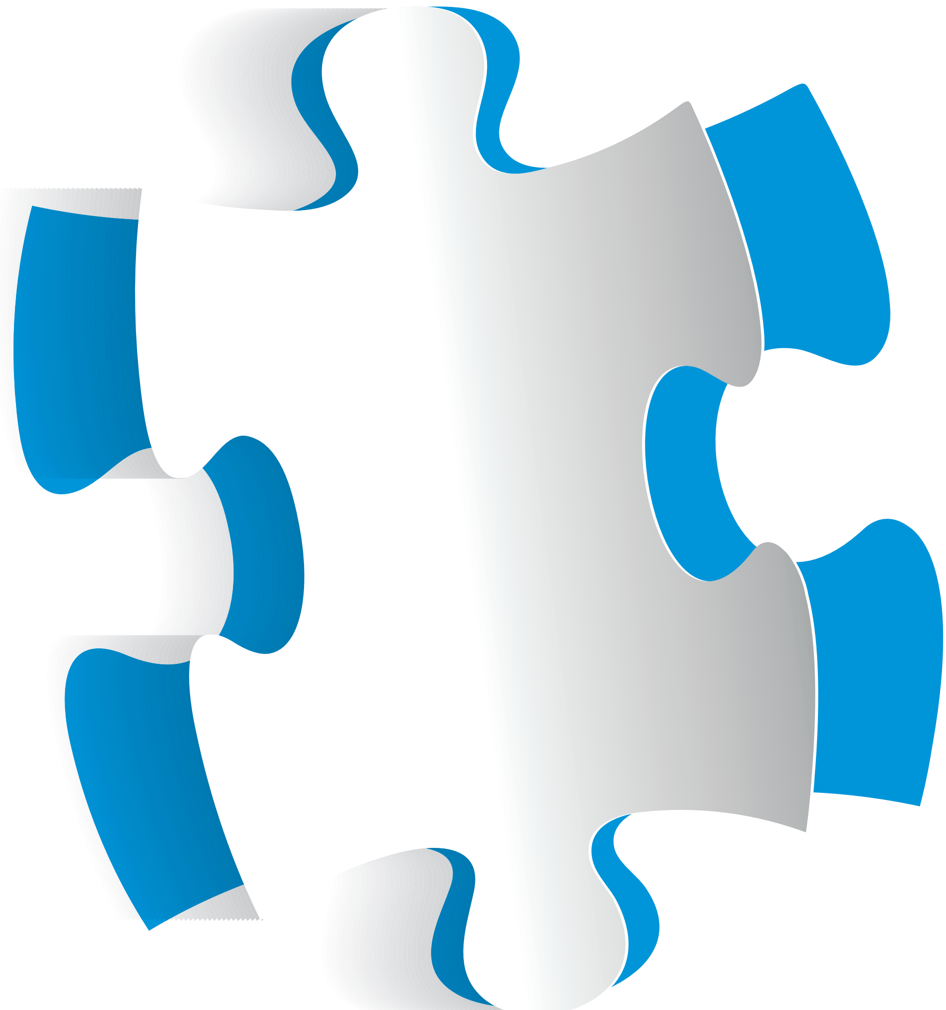
2009 개정 교육과정

인천광역시교육감 인정
고교-04-124-04-13

고|등|학|교

확률과 통계



신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

고|등|학|교

확률과 통계

(주)지학사

들어가는 말

수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

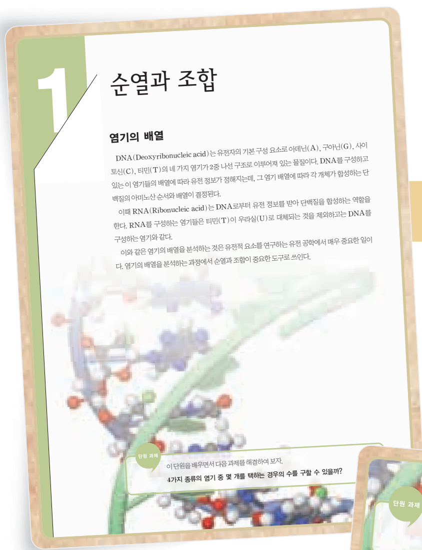
본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.

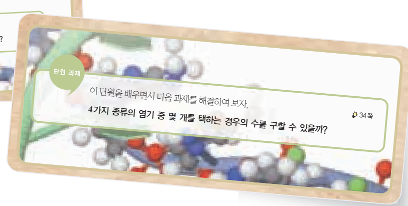
지은이 씀

이 책의 짜임새

대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.

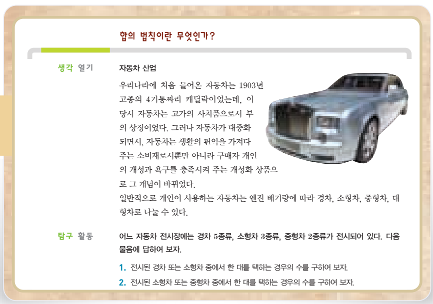


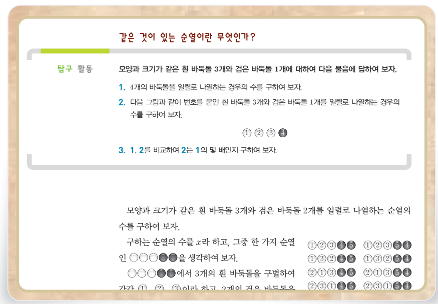


중단원 도입

새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

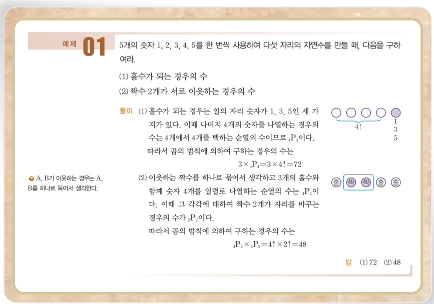
본문 전개

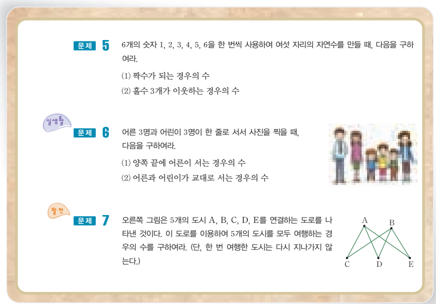




생각 열기 / 탐구 활동

본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.



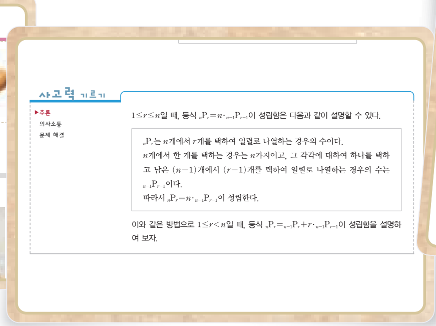


예제 / 문제

대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

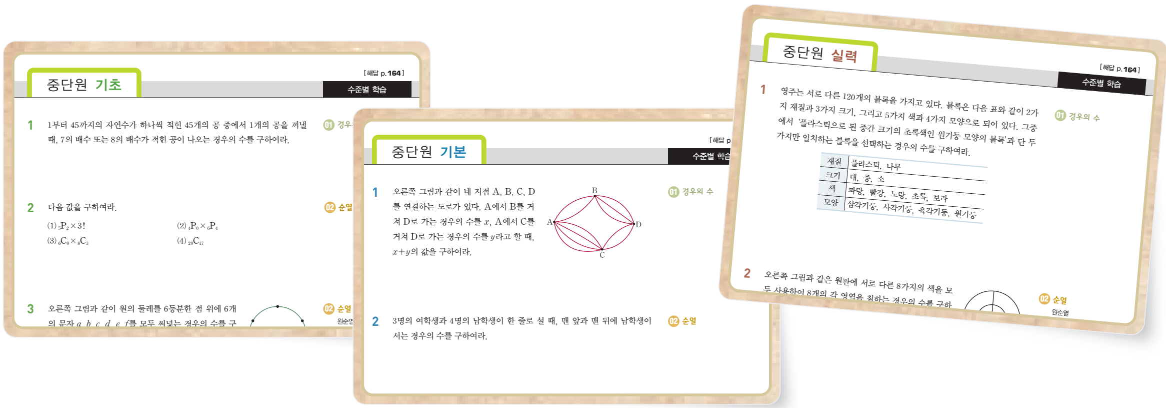
창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.



중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.

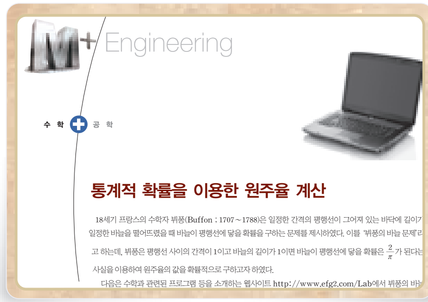


대단원 마무리

대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.

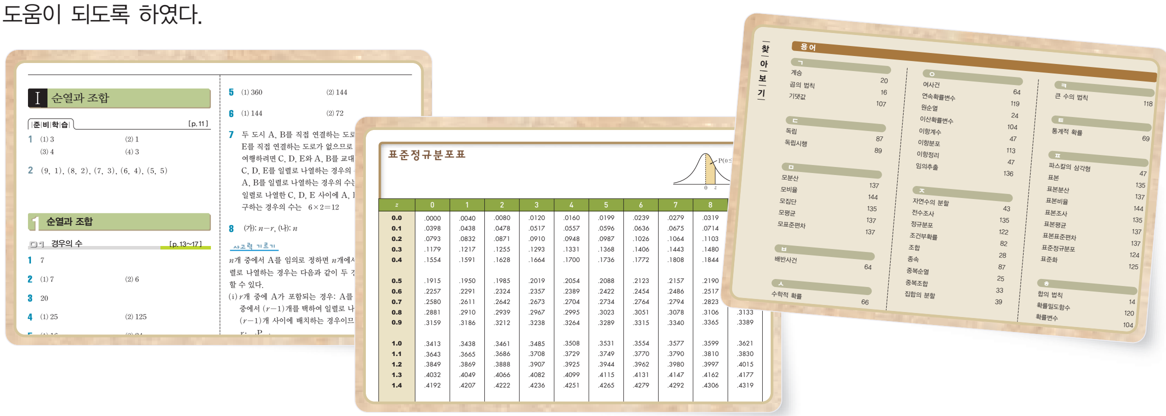
수학 플러스

교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.



부 록

교과서의 문제에 대한 해답을 제공하여 스스로 해결한 문제가 옳은지 확인할 수 있도록 하였다. 또 본문의 내용을 학습할 때 요구되는 여러 가지 값을 표로 제시하였다. 아울러 본문에 등장한 여러 가지 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.



교과서 속 아이콘 활용

중③	선수 학습 내용	보기	구체적인 예시
	계산기 활용 문제	주의	주의할 점
실생활	실생활 문제	참고	참고할 사항
발전	발전 문제		

차례

Ⅰ 순열과 조합

Ⅱ 확률

III 통계

* 부록

우리의 일상생활에서는 매 순간에도

다양한 경우의 수가 존재한다.

순열과 조합

|준|비|학|습|

중② 경우의 수

1 한 개의 주사위를 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수의 눈이 나오는 경우의 수

(2) 4의 배수의 눈이 나오는 경우의 수

(3) 2보다 큰 수의 눈이 나오는 경우의 수

(4) 소수의 눈이 나오는 경우의 수

초등 가르기와 모으기

2 $a+b=10$이 되는 자연수의 순서쌍 (a, b)를 구하여라. (단, $a \geq b$)

1

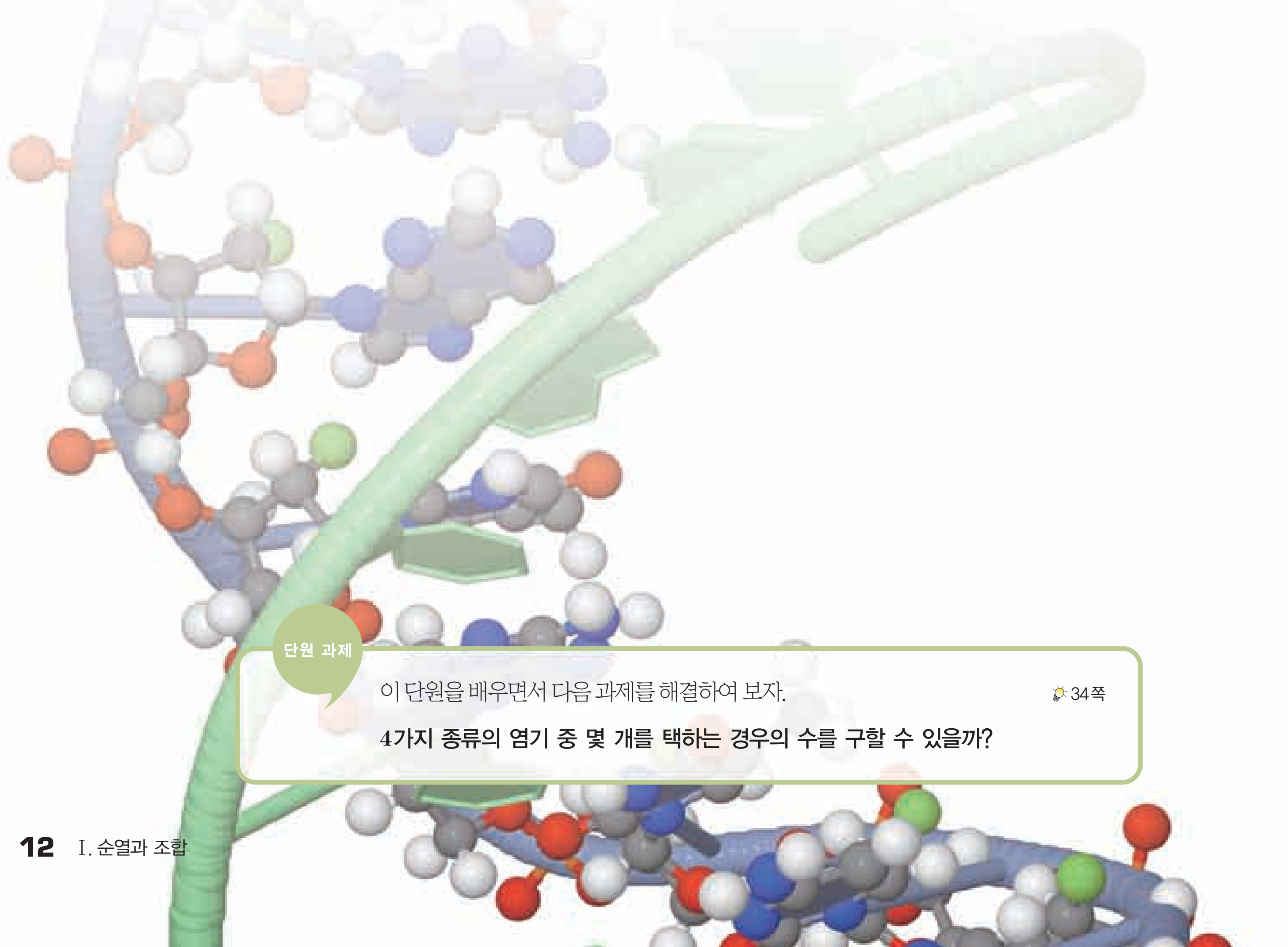
순열과 조합

염기의 배열

DNA(Deoxyribonucleic acid)는 유전자의 기본 구성 요소로 아데닌(A), 구아닌(G), 사이토신(C), 티민(T)의 네 가지 염기가 2중 나선 구조로 이루어져 있는 물질이다. DNA를 구성하고 있는 이 염기들의 배열에 따라 유전 정보가 정해지는데, 그 염기 배열에 따라 각 개체가 합성하는 단백질의 아미노산 순서와 배열이 결정된다.

이때 RNA(Ribonucleic acid)는 DNA로부터 유전 정보를 받아 단백질을 합성하는 역할을 한다. RNA를 구성하는 염기들은 티민(T)이 우라실(U)로 대체되는 것을 제외하고는 DNA를 구성하는 염기와 같다.

이와 같은 염기의 배열을 분석하는 것은 유전적 요소를 연구하는 유전 공학에서 매우 중요한 일이다. 염기의 배열을 분석하는 과정에서 순열과 조합이 중요한 도구로 쓰인다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 34쪽

4가지 종류의 염기 중 몇 개를 택하는 경우의 수를 구할 수 있을까?

01 경우의 수

● 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

합의 법칙이란 무엇인가?

생각 열기

자동차 산업

우리나라에 처음 들어온 자동차는 1903년 고종의 4기통짜리 캐딜락이었는데, 이 당시 자동차는 고가의 사치품으로서 부의 상징이었다. 그러나 자동차가 대중화되면서, 자동차는 생활의 편익을 가져다 주는 소비재로서뿐만 아니라 구매자 개인의 개성과 욕구를 충족시켜 주는 개성화 상품으로 그 개념이 바뀌었다.

일반적으로 개인이 사용하는 자동차는 엔진 배기량에 따라 경차, 소형차, 중형차, 대형차로 나눌 수 있다.

탐구 활동

어느 자동차 전시장에는 경차 5종류, 소형차 3종류, 중형차 2종류가 전시되어 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 전시된 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 전시된 소형차 또는 중형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.
3. 전시된 경차가 m대, 소형차가 n대일 때, 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

경차가 A, B, C, D, E의 5종류, 소형차가 a, b, c의 3종류일 때 경차 또는 소형차 중에서 한 대를 택하는 경우를 생각하여 보자.

경차를 택하는 경우의 수는 A, B, C, D, E이므로 5

소형차를 택하는 경우의 수는 a, b, c이므로 3

이다. 이들 두 가지의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 경차 또는 소형차를 택하는 경우의 수는

$$5+3=8$$

이다.

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **합의 법칙**이 성립한다.

> **합의 법칙**
>
> 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는
>
> $$m+n$$

반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과를 사건이라고 한다.

참고 세 개 이상의 사건에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으면 합의 법칙이 성립한다.

문제 1 3종류의 과일과 4종류의 쿠키가 있다. 이때 한 가지를 골라 먹을 수 있는 경우의 수를 구하여라.

이제 집합의 개념을 이용하여 합의 법칙을 생각하여 보자.

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 집합을 각각 A, B라 하면, 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수는 각각 $n(A)$, $n(B)$와 같다. 이때 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 집합은 $A\cup B$이고, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 집합은 $A\cap B$로 나타낼 수 있으므로 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이다. 한편 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때에는 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$이다. 따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

이다. 이것은 두 사건 A, B에 대한 합의 법칙을 나타낸다.

세 사건 A, B, C에 대하여 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$일 때, $n(A\cup B\cup C)$ $=n(A)+n(B)+n(C)$

예제 01 크기가 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수의 합이 4 또는 8이 되는 경우의 수를 구하여라.

풀이 큰 주사위의 눈의 수를 x, 작은 주사위의 눈의 수를 y라고 할 때, 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 순서쌍 (x, y)로 나타내어 보자.

눈의 수의 합이 4인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}$$

눈의 수의 합이 8인 사건을 B라고 하면

$$B=\{(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)\}$$

이때 두 사건 A, B는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=3+5=8$$

답 8

문제 2 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나온 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수

(2) 나온 눈의 수의 합이 10 이상인 경우의 수

곱의 법칙이란 무엇인가?

생각 열기

영화관

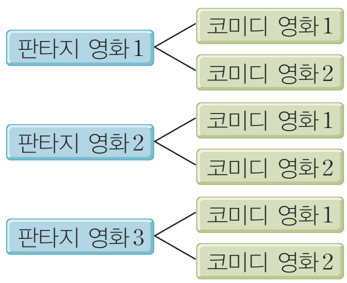
1907년 서울 종로 3가에 단성사가 세워졌을 당시 영화관은 주로 전통 연극을 공연하는 장소였다. 그런데 1990년대 이후 관람 수요가 급증하고 영화 시장이 개방되면서 영화관은 다양한 영화를 상영할 뿐만이 아니라 식사와 쇼핑 등을 즐길 수 있는 복합적인 공간인 멀티플렉스로 거듭나게 되었고, 어느덧 우리 삶 속의 문화 공간으로 자리 잡았다.

탐구 활동

어떤 영화관에서 현재 판타지 영화 3편, 코미디 영화 2편, 공포 영화 5편을 상영하고 있다고 한다. 이 영화관에서 현주와 원상이가 영화를 관람하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 현주는 판타지 영화 한 편을 먼저 관람한 뒤에 코미디 영화 한 편을 관람하려고 한다. 현주가 영화를 관람하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 원상이는 코미디 영화 한 편을 먼저 관람한 뒤에 공포 영화 한 편을 관람하려고 한다. 원상이가 영화를 관람하는 경우의 수를 구하여 보자.

판타지 영화 3편 중에서 한 편을 먼저 보고, 코미디 영화 2편 중에서 한 편을 보는 경우를 생각하여 보자.



판타지 영화 3편 중에서 한 편을 보는 경우의 수는 3이고, 코미디 영화 2편 중에서 한 편을 보는 경우의 수는 2이다. 따라서 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 판타지 영화를 먼저 보고, 코미디 영화를 보는 경우의 수는

$$3\times2=6$$

이다.

일반적으로 경우의 수에 대하여 다음과 같은 **곱의 법칙**이 성립한다.

> **곱의 법칙**
>
> 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는
>
> $$m \times n$$

참고 세 개 이상의 사건에서도 곱의 법칙이 성립한다.

문제 3 상우는 5종류의 셔츠와 4종류의 바지를 가지고 있다. 상우가 자신의 셔츠와 바지를 각각 하나씩 골라 입을 수 있는 경우의 수를 구하여라.

이제 집합의 개념을 이용하여 곱의 법칙을 생각하여 보자.

사건 A가 일어나는 경우의 집합을 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 사건 B가 일어나는 경우의 집합을 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$이라고 하자.

A의 각 원소에 대하여 $b_1, b_2, \cdots, b_n$이 대응되므로 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$$m\text{가지}\left\{\underbrace{\begin{matrix} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \cdots, & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \cdots, & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_m, b_1), & (a_m, b_2), & \cdots, & (a_m, b_n) \end{matrix}}_{n\text{가지}}\right.$$

따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

$$n(A) \times n(B)$$

이다. 이것은 두 사건 A, B에 대한 곱의 법칙을 나타낸다.

문제 4 다음을 구하여라.

(1) 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 모두 홀수인 두 자리의 자연수의 개수

(2) 백의 자리 숫자는 홀수, 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자는 짝수인 세 자리의 자연수의 개수

예제 02

144의 약수의 개수를 구하여라.

● 특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

풀이 144를 소인수분해하면

$$144=2^4\times3^2$$

2^4의 약수의 집합을 A, 3^2의 약수의 집합을 B라고 하면

$$A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4\}$$

$$B=\{1,\ 3,\ 3^2\}$$

$\times$	1	3	3^2
1	1	3	3^2
2	2	2×3	2×3^2
2^2	2^2	$2^2\times3$	$2^2\times3^2$
2^3	2^3	$2^3\times3$	$2^3\times3^2$
2^4	2^4	$2^4\times3$	$2^4\times3^2$

이때 2^4의 약수 각각에 대하여 3^2의 약수를 각각 곱하면 144의 약수가 되므로 144의 약수의 개수는

$$n(A)\times n(B)=5\times3=15$$

● 소수 a, b에 대하여 a^mb^n(m, n은 음이 아닌 정수)의 약수의 개수는

$$(m+1)(n+1)$$

이다.

답 15

문제 5 다음 수의 약수의 개수를 구하여라.

(1) 216　　　　(2) 600

발전

문제 6 p, q, r가 서로 다른 소수이고, l, m, n이 음이 아닌 정수일 때, $p^lq^mr^n$의 약수의 개수는 $(l+1)(m+1)(n+1)$개임을 보여라.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

2006년부터 시행된 '자동차 전국 단일 번호판 제도'에 따라 발급되는 자동차 번호판은 오른쪽 그림과 같이 두 자리 숫자와 한 글자의 한글 및 네 자리 숫자로 표시된다. 이때 최대로 만들 수 있는 자동차 번호판의 개수는 곱의 법칙으로 구할 수 있다. 이와 같이 주변에서 곱의 법칙이 적용되는 경우를 조사하여 말하여 보자.

02 순열

- 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다.
- 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

순열이란 무엇인가?

생각 열기

승부차기

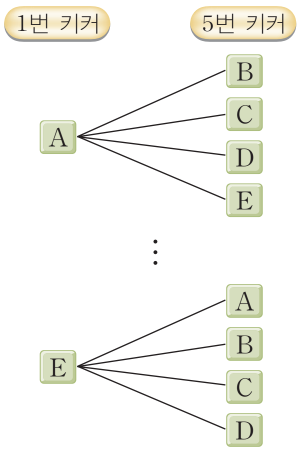
승부차기는 축구 경기에서 정규 시간과 연장전을 모두 치렀음에도 불구하고 승부를 가리지 못했을 경우 각 팀의 선수가 한 번씩 번갈아 가며 5회의 승부차기를 해서 승부를 가리는 일을 말한다.

한국스포츠심리학회지에 따르면 선수들이 가장 싫어하는 승부차기 순서는 1번과 5번으로, 가장 먼저 혹은 가장 마지막에 차야 한다는 부담감 때문이라고 한다.

탐구 활동

어느 축구 시합에서 승부차기를 할 5명의 키커 A, B, C, D, E를 선발하였다. 선발된 5명의 키커에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 선발된 5명의 키커 중에서 1번과 5번 키커를 먼저 정하려고 한다. 이때 1번과 5번 키커를 정하는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 선발된 5명의 키커 중에서 1번부터 5번까지 5명의 순서를 정하는 경우의 수를 구하여 보자.



탐구 활동에서 선발된 5명의 키커에 대하여 1번 키커를 정하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 5번 키커를 정하는 경우의 수는 4이므로 5명의 키커 중에서 1번과 5번 키커를 정하는 경우의 수는

$$5\times4=20$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 $r(r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **순열**이라 하고, 이 순열의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{P}_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_n\mathrm{P}_r$에서 P는 Permutation (순열)의 첫 글자이다.

이를테면 선발된 키커 5명 중 2명의 순서를 정하는 것과 같이 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2$이다.

이제 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 경우는 n가지이고, 두 번째 자리에 올 수 있는 경우는 첫 번째 자리에 놓인 1개를 제외한 $(n-1)$가지, 세 번째 자리에 올 수 있는 경우는 앞의 두 자리에 놓인 2개를 제외한 $(n-2)$가지이다. 이런 방법으로 계속해 나가면 r번째 자리에 올 수 있는 경우는 $(n-r+1)$가지이다.

첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r번째
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
n가지	$(n-1)$가지	$(n-2)$가지	$\cdots$	$(n-r+1)$가지

따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \quad (\text{단, } 0<r\le n)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

순열의 수 [1]

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단, } 0<r\le n)$$

${}_n\mathrm{P}_r$는 n부터 시작하여 1만큼씩 작은 수를 차례로 r개 곱한 것이다.

보기 (1) ${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$ (2) ${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_3\mathrm{P}_2$ (2) ${}_4\mathrm{P}_1$

(3) ${}_6\mathrm{P}_5$ (4) ${}_8\mathrm{P}_4$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 n 또는 r의 값을 구하여라.

(1) ${}_n\mathrm{P}_2=56$ (2) ${}_5\mathrm{P}_r=60$

(3) ${}_6\mathrm{P}_r=360$ (4) ${}_n\mathrm{P}_3=120$

문제 3 회원 수가 12명인 학생 복지 위원회에서 회장, 부회장, 총무를 각각 1명씩 선출하는 경우의 수를 구하여라.

서로 다른 n개에서 n개 모두를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r$에서 $r=n$인 경우이므로 다음과 같다.

$$ {}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 $$

이와 같이 1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 **계승**이라고 하며, 이것을 기호로

$$ \boldsymbol{n!} $$

과 같이 나타낸다. 즉,

$$ n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 $$

이다.

$n!$은 'n 팩토리얼(factorial)'이라고 읽는다.

한편 $r<n$일 때, 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$를 계승을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1} \\ &=\frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned} $$

여기서 $0!=1$로 정의하면 위의 식은 $r=n$일 때에도 성립한다.

또 위의 식에서 $r=0$이면 ${}_n\mathrm{P}_0=\dfrac{n!}{n!}=1$이므로 ${}_n\mathrm{P}_0=1$로 정의한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

순열의 수 [2]

(1) ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

보기 (1) ${}_6\mathrm{P}_2=\dfrac{6!}{(6-2)!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=30$ (2) $3!=3\times2\times1=6$

문제 4 다음 값을 구하여라.

(1) $5!$ (2) $4!\times0!$

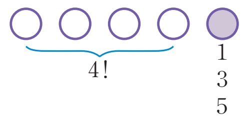
(3) ${}_6\mathrm{P}_6$ (4) ${}_7\mathrm{P}_4\times3!$

예제 01 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 한 번씩 사용하여 다섯 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 홀수가 되는 경우의 수

(2) 짝수 2개가 서로 이웃하는 경우의 수

풀이 (1) 홀수가 되는 경우는 일의 자리 숫자가 1, 3, 5인 세 가지가 있다. 이때 나머지 4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 4개에서 4개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_4P_4$이다.

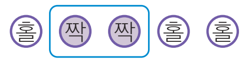


따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$$3 \times {}_4P_4 = 3 \times 4! = 72$$

● A, B가 이웃하는 경우는 A, B를 하나로 묶어서 생각한다.

(2) 이웃하는 짝수를 하나로 묶어서 생각하고 3개의 홀수와 함께 숫자 4개를 일렬로 나열하는 순열의 수는 ${}_4P_4$이다. 이때 그 각각에 대하여 짝수 2개가 자리를 바꾸는 경우의 수가 ${}_2P_2$이다.



따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_4P_4 \times {}_2P_2 = 4! \times 2! = 48$$

답 (1) 72 (2) 48

문제 5 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 한 번씩 사용하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 짝수가 되는 경우의 수

(2) 홀수 3개가 이웃하는 경우의 수

실생활

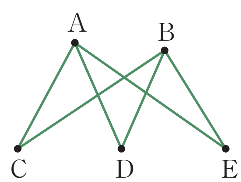
문제 6 어른 3명과 어린이 3명이 한 줄로 서서 사진을 찍을 때, 다음을 구하여라.

(1) 양쪽 끝에 어른이 서는 경우의 수

(2) 어른과 어린이가 교대로 서는 경우의 수

발전

문제 7 오른쪽 그림은 5개의 도시 A, B, C, D, E를 연결하는 도로를 나타낸 것이다. 이 도로를 이용하여 5개의 도시를 모두 여행하는 경우의 수를 구하여라. (단, 한 번 여행한 도시는 다시 지나가지 않는다.)



예제 02

$1 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 증명하여라.

증명 $n \cdot {}_{n-1}P_{r-1} = n \cdot \dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$

따라서 ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$이 성립한다.

문제 8

다음은 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$임을 증명하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 식을 써넣어라.

$${}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$$
$$= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!} + \frac{r \cdot (n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$
$$= \frac{(\boxed{\text{(가)}}) \cdot (n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r \cdot (n-1)!}{(n-r)!}$$
$$= \frac{\boxed{\text{(나)}} \cdot (n-1)!}{(n-r)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$1 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함은 다음과 같이 설명할 수 있다.

> ${}_nP_r$는 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수이다.
> n개에서 한 개를 택하는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 하나를 택하고 남은 $(n-1)$개에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_{n-1}P_{r-1}$이다.
> 따라서 ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$이 성립한다.

이와 같은 방법으로 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 설명하여 보자.

원순열이란 무엇인가?

생각 열기

강강술래

강강술래는 1966년 중요무형문화재 제8호로 지정된 민속놀이로, 주로 남해안 일대에서 대보름날이나 한가윗날 달밤에 여러 사람이 함께 손을 잡고 둥글게 돌면서 노는 민속놀이이다. 임진왜란 때 왜군의 눈을 속이기 위하여 이순신 장군이 여자들을 모아 남장을 하게 하고 옥매산을 돌도록 한 데서 비롯되었다는 설이 있다.

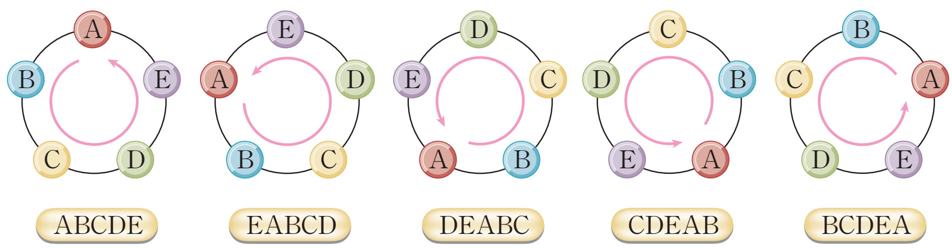
탐구 활동

A, B, C, D, E 다섯 사람이 강강술래를 하려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다섯 사람이 일렬로 서는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 다섯 사람이 일렬로 설 때, A, B, C, D, E의 순서로 서는 것과 B, C, D, E, A의 순서로 서는 것은 같은 경우인가?
3. 다섯 사람이 손을 잡고 둥글게 설 때, A, B, C, D, E의 순서로 서는 것과 B, C, D, E, A의 순서로 서는 것은 같은 경우인가?

A, B, C, D, E 다섯 사람이 손을 잡고 강강술래를 할 때, 둥글게 서는 경우의 수에 대하여 알아보자.

다섯 사람이 둥글게 설 때에는 처음과 끝의 구별이 없고, 회전하여도 순서는 바뀌지 않으므로 다음 5가지 경우는 모두 같은 경우로 생각할 수 있다.



즉, 다섯 사람이 한 줄로 서는 경우의 수는 ${}_5P_5$이지만 둥글게 설 때에는 그림과 같이 5가지씩 같은 경우가 생긴다. 따라서 다섯 사람이 둥글게 서는 경우의 수는

$$\frac{{}_5P_5}{5}=\frac{5!}{5}=4!=24$$

이다.

이와 같이 서로 다른 것을 원형으로 나열하는 순열을 **원순열**이라 하고, 일반적으로 원순열의 수는 다음과 같다.

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 원순열의 수는

$$\frac{{}_{n}\mathrm{P}_{n}}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

예제 03 6명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하여라.

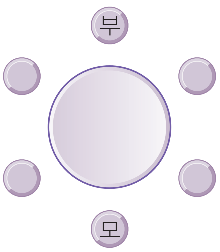
(1) 6명이 식탁에 앉는 경우의 수

(2) 부모가 서로 마주 보고 앉는 경우의 수

풀이 (1) 6명이 식탁에 앉는 경우의 수는 원순열의 수이므로

$$(6-1)!=5!=120$$

(2) 오른쪽 그림과 같이 부모를 먼저 자리에 앉히고 다른 가족 4명이 나머지 자리에 앉으면 된다. 이때 다른 가족 4명이 나머지 자리에 앉는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{4}$이므로 구하는 경우의 수는 ${}_{4}\mathrm{P}_{4}=4!=24$

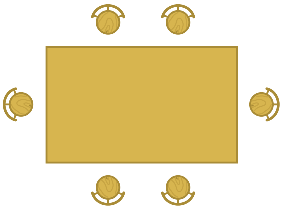


답 (1) 120 (2) 24

문제 9 남학생 3명과 여학생 3명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 서로 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

발전

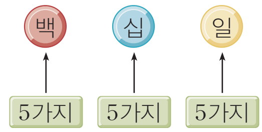
문제 10 6명이 오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 6인용 식탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



중복순열이란 무엇인가?

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 사용하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 같은 숫자를 중복하여 쓸 수 있다고 하면 세 자리의 자연수는 모두 몇 개를 만들 수 있는지 알아보자.

백의 자리 숫자를 택하는 경우는 5가지이고, 그 각각에 대하여 십의 자리 숫자를 택하는 경우는 5가지이다. 또 이들 각각에 대하여 일의 자리 숫자를 택하는 경우도 5가지이다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$5\times5\times5=5^3=125$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열을 **중복순열**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다. 이때 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열은 r개의 자리에 올 수 있는 경우의 수가 모두 n이므로 곱의 법칙에 의하여

$$_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

임을 알 수 있다.

> Π는 Product(곱)의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

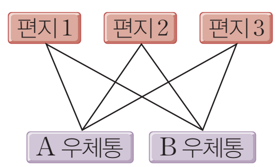
$$_n\Pi_r=n^r$$

> $_n\Pi_r$에서는 중복을 허용하므로 $n<r$인 경우도 있다.

예제 04 서로 다른 3통의 편지를 A, B 두 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 우체통에 편지를 넣는 경우의 수는 A, B 두 우체통에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $_2\Pi_3=2^3=8$ **답** 8



문제 11 4명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 나올 수 있는 경우의 수를 구하여라.

문제 12 3개의 숫자 1, 2, 3으로 중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중에서 홀수의 개수를 구하여라.

같은 것이 있는 순열이란 무엇인가?

탐구 활동 **모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 1개에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 4개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여 보자.

2. 다음 그림과 같이 번호를 붙인 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여 보자.

①②③❹

3. **1**, **2**를 비교하여 **2**는 **1**의 몇 배인지 구하여 보자.

모양과 크기가 같은 흰 바둑돌 3개와 검은 바둑돌 2개를 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하여 보자.

구하는 순열의 수를 x라 하고, 그중 한 가지 순열인 ○○○●●을 생각하여 보자.

○○○●●에서 3개의 흰 바둑돌을 구별하여 각각 ①, ②, ③이라 하고, 2개의 검은 바둑돌을 구별하여 각각 ❹, ❺라고 하면 ○○○●●와 같이 나열하는 경우의 수는 $3!\times2!$이다.

①②③❹❺	①②③❺❹
①③②❹❺	①③②❺❹
②①③❹❺	②①③❺❹
②③①❹❺	②③①❺❹
③①②❹❺	③①②❺❹
③②①❹❺	③②①❺❹

마찬가지로 x가지의 순열 각각에 대하여도 $(3!\times2!)$가지의 경우가 있으므로 3개의 흰 바둑돌과 2개의 검은 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$x\times(3!\times2!) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 한편 서로 다른 5개의 바둑돌을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$이고, 이것은 ①과 같으므로

$$x\times(3!\times2!)=5!$$

이다. 따라서 구하는 순열의 수는

$$x=\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

이다.

일반적으로 같은 것이 있는 순열의 수는 다음과 같다.

같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

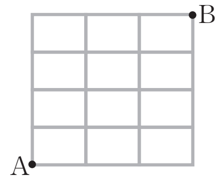
$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \text{ (단, } p+q+\cdots+r=n\text{)}$$

보기 영어 단어 'coffee'의 6개 알파벳을 일렬로 나열하는 순열의 수는 $\dfrac{6!}{1!1!2!2!}=180$

문제 13 영어 단어 'success'의 7개 알파벳을 일렬로 나열하는 순열의 수를 구하여라.

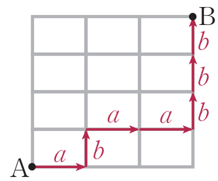
예제 05

오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



● 최단 거리로 가는 방법은 오른쪽과 위쪽으로만 가는 방법이다.

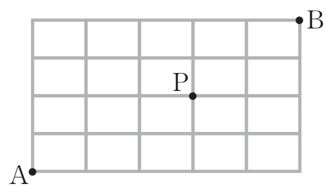
풀이 오른쪽 그림과 같이 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b로 놓으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 4개의 b를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{7!}{3!4!}=35$

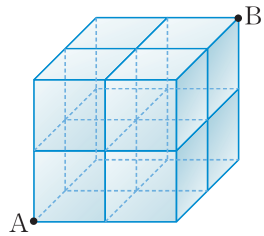
답 35

문제 14 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하여라.



창의 up

오른쪽 그림은 선을 따라 수평과 수직으로 이동할 수 있는 놀이 기구이다. 이 놀이 기구의 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하여라.



03 조합

● 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다.
● 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.

조합이란 무엇인가?

생각 열기

얼음과자

얼음과자의 역사는 고대에 음식물을 냉장시키는 것에서 시작하는데, 마르코 폴로의 "동방견문록"에 의하면 중국에서는 기원전 3세기경부터 얼음에 소금과 과일을 넣어 만든 셔벗 형태의 얼음과자를 즐겼다고 한다. 서양에서는 알렉산더 대왕이 높은 산에서 운반한 눈에 꿀, 과일, 우유 또는 양의 젖을 섞은 것을 즐겨 먹었다고 전해지며, 로마 시대에는 여름에 상점에서 얼음 음료를 팔았다고 한다.

탐구 활동

바닐라, 초콜릿, 딸기, 아몬드 아이스크림을 판매하는 어느 아이스크림 전문점에서 아이스크림을 주문하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 가지 아이스크림을 반씩 섞어서 주문할 때, 그릇에 담는 순서를 정하여 택하는 경우를 구하여 보자.

2. 두 가지 아이스크림을 반씩 섞어서 주문할 때, 그릇에 담는 순서를 정하지 않고 택하는 경우는 **1**과 어떤 차이가 있는지 말하여 보자.

순열에서는 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서를 생각하고 나열하는 경우의 수를 다루었다. 이제 순서를 생각하지 않고 택하는 경우의 수에 대하여 알아보자.

탐구 활동에서 네 가지 종류의 아이스크림에서 두 가지를 순서대로 택하여 그릇에 담는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$이지만, 순서를 생각하지 않고 두 가지를 택하여 그릇에 담는 경우는 다음과 같이 6가지가 있다.

{바닐라, 초콜릿}, {바닐라, 딸기}, {바닐라, 아몬드},
{초콜릿, 딸기}, {초콜릿, 아몬드}, {딸기, 아몬드}

일반적으로 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r $(r\le n)$개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 **조합**이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{C}_r$$

와 같이 나타낸다.

● ${}_n\mathrm{C}_r$에서 C는 Combination (조합)의 첫 글자이다.

이제 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$이고, 그 각각에 대하여 r개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $r!$이다.

따라서 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r!$이다. 이때 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$이므로

$${}_{n}\mathrm{C}_{r}\times r! = {}_{n}\mathrm{P}_{r}$$

이다. 즉,

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다.

위의 식에서 $r=0$이면 $0!=1$이므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$이다.

따라서 ${}_{n}\mathrm{C}_{0}=1$로 정의하면 위의 식은 $r=0$일 때에도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$

보기 ${}_{10}\mathrm{C}_{4} = \frac{{}_{10}\mathrm{P}_{4}}{4!} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}$

(2) ${}_{5}\mathrm{C}_{5}$

(3) ${}_{9}\mathrm{C}_{6}$

(4) ${}_{10}\mathrm{C}_{0}$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

(1) ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}=15$

(2) ${}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{3}={}_{n}\mathrm{C}_{2}$

문제 3 무지개의 7가지 색 중에서 4가지를 고르는 경우의 수를 구하여라.

예제 01 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 4개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 1, 2가 적힌 공이 모두 포함되는 경우의 수

(2) 1, 2가 적힌 공이 모두 포함되지 않는 경우의 수

풀이 (1) 4개의 공 중에 1, 2가 적힌 공이 포함되어야 하므로 구하는 경우의 수는 1, 2가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

(2) 4개의 공 중에 1, 2가 적힌 공이 포함되지 않아야 하므로 구하는 경우의 수는 1, 2가 적힌 공을 제외한 7개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_7C_4=\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

답 (1) 21 (2) 35

문제 4 키가 모두 다른 10명으로 이루어진 농구 동호회에서 5명의 대표를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 키가 가장 큰 선수와 가장 작은 선수가 함께 뽑히는 경우의 수

(2) 키가 가장 큰 선수는 뽑히고 가장 작은 선수는 뽑히지 않는 경우의 수

예제 02 남자 4명과 여자 5명 중에서 3명의 대표를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 남자 1명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 적어도 1명의 남자가 포함되는 경우의 수

풀이 (1) 남자 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1$이고, 여자 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_5C_2=4\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=40$

(2) 적어도 1명의 남자가 포함되는 경우는 9명 중에서 3명을 뽑는 전체 경우에서 남자가 한 명도 뽑히지 않는 경우를 제외한 것과 같다. 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_3$이고, 이 중에서 3명이 모두 여자인 경우의 수는 ${}_5C_3$이다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_9C_3-{}_5C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=74$

답 (1) 40 (2) 74

문제 5 어느 학교의 기악 합주반에는 바이올린 연주자 6명, 첼로 연주자 4명이 있다. 이 중에서 4명의 연주자를 뽑을 때, 다음을 구하여라.

(1) 바이올린 연주자 2명, 첼로 연주자 2명을 뽑는 경우의 수

(2) 적어도 1명의 바이올린 연주자가 포함되는 경우의 수

예제 03 $0 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$가 성립함을 증명하여라.

> ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$에서 r 대신에 $n-r$를 대입한다.

증명 ${}_nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$

따라서 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$가 성립한다.

문제 6 다음은 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$임을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 써넣어라.

$$\begin{aligned}
&{}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
&= \frac{\boxed{\text{(가)}} \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(\boxed{\text{(나)}}) \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{\boxed{\text{(다)}} \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r
\end{aligned}$$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$0 \le r \le n$일 때, 등식 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$가 성립함은 다음과 같이 설명할 수 있다.

> n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 n개에서 필요하지 않은 $(n-r)$개를 택하여 버리는 조합의 수와 같으므로 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$가 성립한다.

이와 같은 방법으로 $1 \le r < n$일 때, 등식 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$가 성립함을 설명하여 보자.

중복조합이란 무엇인가?

탐구 활동

상일이는 선물가게에서 흰색, 빨간색, 파란색 세 종류의 머그잔 중에서 친구들에게 선물할 머그잔을 구입하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 머그잔 2개를 서로 다른 색으로 구입하는 경우의 수를 구하여 보자.

2. 머그잔 4개를 구입하는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 흰색 머그잔을 a, 빨간색 머그잔을 b, 파란색 머그잔을 c라고 할 때, 세 종류의 머그잔 중에서 4개의 머그잔을 구입하는 경우의 수는 서로 다른 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 네 문자를 택하는 조합의 수로 구할 수 있다.

서로 다른 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 조합은

$$aaaa,\quad aaab,\quad aaac,\quad aabb,\quad aabc,$$
$$aacc,\quad abbb,\quad abbc,\quad abcc,\quad accc,$$
$$bbbb,\quad bbbc,\quad bbcc,\quad bccc,\quad cccc$$

의 15가지이다.

이때 각 조합에서 선택된 네 문자를 a, b, c 순으로 나열한 후 문자를 ●로 나타내고 서로 다른 세 문자의 경계에는 ▮를 사용하여 나타내어 보자.

즉, 왼쪽부터 첫 번째 ▮의 왼쪽의 ●는 a, 첫 번째 ▮와 두 번째 ▮ 사이의 ●는 b, 두 번째 ▮의 오른쪽의 ●는 c로 나타내면

●●●●▮▮ ●●●▮●▮ ●●●▮▮● ●●▮●●▮ ●●▮●▮●

●●▮▮●● ●▮●●●▮ ●▮●●▮● ●▮●▮●● ●▮▮●●●

▮●●●●▮ ▮●●●▮● ▮●●▮●● ▮●▮●●● ▮▮●●●●

이다.

a를 3개, c를 1개 택하는 조합인 $aaac$는

●●●▮▮●

로 대응되고, b를 4개 택하는 조합인 $bbbb$는

▮●●●●▮

로 대응된다.

그러면 세 문자 a, b, c에서 중복을 허락하여 네 문자를 택하는 조합은 4개의 ●와 2개의 ▮로 이루어진 순열로 볼 수 있다.

따라서 구하는 조합의 수는 같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 식에 의하여

$$\frac{\{4+(3-1)\}!}{4!(3-1)!}=\frac{6!}{4!2!}=15$$

임을 알 수 있다.

그리고 이것은 조합의 수 ${}_{4+(3-1)}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4$와 같다.

이와 같이 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라 하고, 그 수를 기호로

$$_{n}\mathrm{H}_{r}$$

와 같이 나타낸다.

$_{n}\mathrm{H}_{r}$에서 H는 Homogeneous의 첫 글자이다.

중복조합의 수 $_{n}\mathrm{H}_{r}$는 r개의 ●와 경계를 나타내는 $(n-1)$개의 ▮로 이루어진 같은 것이 있는 순열의 수와 같으므로 다음 등식이 성립한다.

$$_{n}\mathrm{H}_{r}=\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}={}_{r+(n-1)}\mathrm{C}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$$_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

참고 $_{n}\mathrm{H}_{r}$에서는 중복을 허용하므로 $n<r$인 경우도 있다.

문제 7 사탕, 초콜릿, 쿠키 3종류의 간식에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수를 구하여라.

예제 04 $(a+b+c)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

풀이 $(a+b+c)^4$을 전개할 때 생기는 항들은

$$a^4,\ a^3b,\ a^2bc,\ bc^3,\ \cdots$$

등으로 모두 4차의 꼴이다. 이것은

$$aaaa,\ aaab,\ aabc,\ bccc,\ \cdots$$

등으로 볼 수 있으므로 서로 다른 항의 개수는 a, b, c의 세 문자에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$_{3}\mathrm{H}_{4}={}_{3+4-1}\mathrm{C}_{4}={}_{6}\mathrm{C}_{4}=15$$

답 15

문제 8 $(a+b+c+d)^6$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

예제 **05** 방정식 $x+y+z=6$의 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구하여라.

음이 아닌 정수인 해이므로 0도 해가 될 수 있다. 즉, 어떤 문자는 하나도 뽑지 않아도 된다.

풀이 방정식 $x+y+z=6$의 한 쌍의 해 $x=2$, $y=3$, $z=1$을 x가 2개, y가 3개, z가 1개로 생각하면 $xxyyyz$로 나타낼 수 있다.

음이 아닌 정수인 해의 개수는 서로 다른 세 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 해의 개수는

$$_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6=28$$

답 28

문제 **9** 방정식 $x+y+z=9$의 양의 정수인 해의 개수를 구하여라.

양의 정수인 해는 x, y, z를 각각 하나씩 뽑고 나머지에서 음이 아닌 정수인 해를 구하는 것과 같다.

창의 up

빨간 공, 노란 공, 파란 공이 각각 10개씩 들어 있는 주머니에서 7개의 공을 꺼낼 때, 각 색깔의 공이 적어도 한 개씩은 포함되도록 하는 경우의 수를 구하는 방법을 설명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

4가지 종류의 염기 중 7개를 택하는 경우의 수를 구하여 보자.

중단원 **기초**

[해답 p. 164]

수준별 학습

1 1부터 45까지의 자연수가 하나씩 적힌 45개의 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 때, 7의 배수 또는 8의 배수가 적힌 공이 나오는 경우의 수를 구하여라.

01 경우의 수

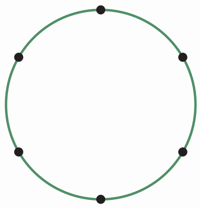
2 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_{5}P_{2} \times 3!$　　(2) ${}_{4}P_{0} \times {}_{6}P_{4}$

(3) ${}_{6}C_{0} \times {}_{8}C_{3}$　　(4) ${}_{20}C_{17}$

02 순열　03 조합

3 오른쪽 그림과 같이 원의 둘레를 6등분한 점 위에 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 모두 써넣는 경우의 수를 구하여라.



02 순열
원순열

4 서로 다른 5통의 편지를 서로 다른 2개의 우체통에 넣는 경우의 수를 구하여라.

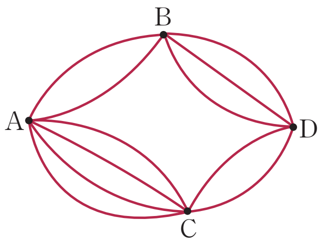
02 순열
중복순열

5 모양과 크기가 같은 4개의 태극기, 3개의 오륜기, 2개의 적십자기를 도로에 일렬로 세우는 경우의 수를 구하여라.

02 순열
같은 것이 있는 순열

중단원 기본

1 오른쪽 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D를 연결하는 도로가 있다. A에서 B를 거쳐 D로 가는 경우의 수를 x, A에서 C를 거쳐 D로 가는 경우의 수를 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

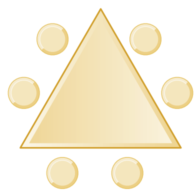


01 경우의 수

2 3명의 여학생과 4명의 남학생이 한 줄로 설 때, 맨 앞과 맨 뒤에 남학생이 서는 경우의 수를 구하여라.

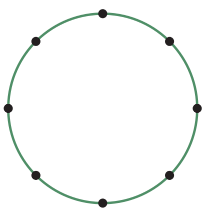
02 순열

3 오른쪽 그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구하여라.



02 순열
원순열

4 오른쪽 그림과 같이 원의 둘레를 8등분한 점 중에서 4개의 점을 연결하여 만들 수 있는 사각형의 개수를 구하여라.



03 조합

5 $(a+b+c)^6$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

03 조합
중복조합

[해답 p.164]

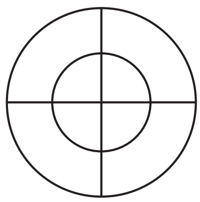
중단원 실력

1 영주는 서로 다른 120개의 블록을 가지고 있다. 블록은 다음 표와 같이 2가지 재질과 3가지 크기, 그리고 5가지 색과 4가지 모양으로 되어 있다. 그중에서 '플라스틱으로 된 중간 크기의 초록색인 원기둥 모양의 블록'과 단 두 가지만 일치하는 블록을 선택하는 경우의 수를 구하여라.

01 경우의 수

재질	플라스틱, 나무
크기	대, 중, 소
색	파랑, 빨강, 노랑, 초록, 보라
모양	삼각기둥, 사각기둥, 육각기둥, 원기둥

2 오른쪽 그림과 같은 원판에 서로 다른 8가지의 색을 모두 사용하여 8개의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 두 원의 중심은 같고 두 선분은 원의 중심에서 수직으로 만난다.)



02 순열
원순열

3 어느 건물에서는 출입을 통제하기 위하여 각 자리가 0 또는 1로 이루어진 8자리 문자열의 보안 카드를 사용하고 있는데, 보안 카드의 8자리 문자열에 포함된 1의 개수가 5개이거나 문자열의 처음 4자리가 0110이면 이 건물에 출입할 수 있다. 이 건물에 출입할 수 있는 서로 다른 보안 카드의 개수를 구하여라.

02 순열 03 조합

4 방정식 $w+x+y+z=9$의 음이 아닌 정수인 해의 개수를 구하여라.

(단, $w\geq0$, $x\geq1$, $y\geq2$, $z\geq0$)

03 조합
중복조합

2 분할과 이항정리

사탕을 나누어 담아 보자.

설탕이나 엿을 끓였다가 식혀서 만드는 사탕은 종류가 매우 다양한데, 설탕을 빛깔이 변할 때까지 졸여서 만든 캐러멜(caramel), 먹을 때 아삭아삭 부서지고 이에 달라붙지 않는 드롭스(drops), 과즙이나 브랜디, 위스키 등이 들어간 봉봉(bonbon), 설탕 반죽을 탄산가스로 부풀린 후 견과류나 과일 조각을 섞어서 만든 누가(nougat) 등이 있다.

사탕은 B.C. 2000년경 이집트에서 처음 만들어졌는데, 그 당시는 과일 등을 벌꿀에 버무려서 만든 단 과자였다. 그 후 사탕수수로 만든 가루 설탕에 아카시아의 수액에서 얻은 아라비아고무를 섞어 로젠지(lozenge, 마름모꼴의 약용 드롭스)라는 것을 만들었는데, 이것이 사탕의 시조라고 할 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 45쪽

모양과 크기가 같은 사탕을 같은 종류의 봉지에 나누어 담는 경우의 수를 구할 수 있을까?

01

분할

- 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있다.
- 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수를 구할 수 있다.

집합의 분할이란 무엇인가?

생각 열기

자원봉사자

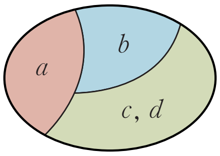
자원봉사자는 사회 또는 공공의 이익을 위한 일을 자기 의지로 행하는 사람으로 이들의 봉사 활동은 보통 비영리 단체를 통하는 경우가 많다. 하지만 이와는 별도로 개인 또는 몇몇 사람들이 비교적 격식을 차리지 않고 자유롭게 봉사 활동을 펼치는 경우도 있다.

탐구 활동

네 명의 학생 a, b, c, d가 여러 모둠으로 나뉘어 자원봉사를 하기로 하였다. 한 사람은 한 모둠에만 들어갈 수 있고 각 모둠에는 적어도 한 사람이 포함되어야 한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 네 명을 한 모둠으로 만드는 경우의 수를 구하여 보자.
2. 네 명을 세 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여 보자.
3. 네 명을 다섯 모둠으로 나누는 경우의 수를 구하여 보자.

탐구 활동은 네 명의 학생을 원소로 하는 집합 $\{a, b, c, d\}$를 몇 개의 서로소인 부분집합으로 나누는 것과 같다.



예를 들어 $\{a\} \cup \{b\} \cup \{c, d\}$는 집합 $\{a, b, c, d\}$를 서로소인 세 부분집합으로 나눈 것이다.

이와 같이 주어진 집합을 몇 개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 **집합의 분할**이라고 한다.

일반적으로 n개의 원소를 가지고 있는 집합을 $k(k \leq n)$개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호

$$S(n, k)$$

로 나타낸다.

집합의 분할의 수를 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)라고도 한다. 또 기호 $S(n, k)$에서 S는 스털링 수의 첫 글자에서 따온 것이다.

따라서 n개의 원소를 가지고 있는 집합의 분할의 수는

$$S(n,\ 1)+S(n,\ 2)+\cdots+S(n,\ n)$$

이다.

보기 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$을 2개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호로 나타내면 $S(3,\ 2)$이다.

문제 1 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$를 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수를 기호로 나타내어라.

예제 01 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 A의 분할의 수를 구하여라.

풀이 집합 A를 1개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$$A=\{1,\ 2,\ 3\}$$

이므로 $S(3,\ 1)=1$

집합 A를 2개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$$A=\{1\}\cup\{2,\ 3\}=\{2\}\cup\{1,\ 3\}=\{3\}\cup\{1,\ 2\}$$

이므로 $S(3,\ 2)=3$

집합 A를 3개의 부분집합의 합집합으로 나타내면

$$A=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$$

이므로 $S(3,\ 3)=1$

따라서 집합 A의 분할의 수는

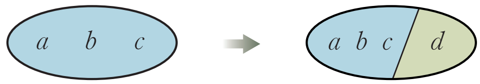
$$S(3,\ 1)+S(3,\ 2)+S(3,\ 3)=1+3+1=5$$

답 5

문제 2 집합 $X=\{w,\ x,\ y,\ z\}$에 대하여 집합 X의 분할의 수를 구하여라.

예제 02 세 명의 학생 a, b, c를 한 모둠 또는 두 모둠으로 나누는 경우를 이용하여 네 명의 학생 a, b, c, d를 두 모둠으로 나누는 분할의 수 $S(4,\ 2)$를 구하여라.

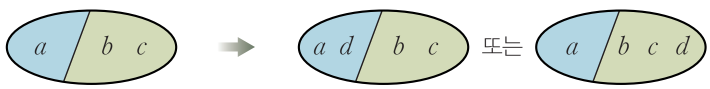
풀이 (i) 세 명의 학생 a, b, c를 한 모둠으로 나누는 경우의 수는 $S(3,\ 1)=1$이다. 이때 학생 d가 홀로 모둠을 이루면 네 명의 학생이 두 모둠을 이루므로 네 명의 학생이 두 모둠을 이루는 경우의 수는 1이다.



(ii) 세 명의 학생 a, b, c를 두 모둠으로 나누는 경우의 수는 다음 표와 같이 $S(3,\ 2)=3$이다.

모둠 나누기	
a	b, c
b	a, c
c	a, b

위의 표에서 각각의 경우에 학생 d가 들어갈 수 있는 경우는 2가지씩이므로 네 명의 학생이 두 모둠을 이루는 경우의 수는 $3\times2=6$이다.



(i), (ii)에 의하여 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 분할의 수는

$$S(4,\ 2)=1+6=7$$

답 7

문제 3 네 명의 학생을 두 모둠 또는 세 모둠으로 나누는 경우를 이용하여 다섯 명의 학생을 세 모둠으로 나누는 분할의 수 $S(5,\ 3)$을 구하여라.

창의 up

조합을 이용하여 $S(4,\ 2)$를 구하는 방법을 설명하여라.

이제 $S(n, k)(1 \le k \le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예를 들어 $n=3$, $k=2$이면 $S(3, 2)$는 원소의 개수가 세 개인 집합 $A=\{1, 2, 3\}$을 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수이다.

따라서 $A=\{1\} \cup \{2, 3\}=\{2\} \cup \{1, 3\}=\{3\} \cup \{1, 2\}$이므로 $S(3, 2)=3$이다.

여기서 원소 3이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우는 $\{3\} \cup \{1, 2\}$이고, 이 경우 분할의 수는 3을 제외한 2개의 원소를 가진 집합을 1개의 모둠으로 분할하는 수와 같으므로 $S(2, 1)$이다.

원소 3이 다른 원소와 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우는 $\{1\} \cup \{2, 3\}$, $\{2\} \cup \{1, 3\}$이고, 이 경우 분할의 수는 3을 제외한 2개의 원소를 가진 집합을 2개의 모둠으로 분할한 후 3을 둘 중 한 모둠에 포함시키는 것과 같으므로 $2S(2, 2)$이다.

따라서 $S(3, 2)=S(2, 1)+2S(2, 2)=1+2 \cdot 1=3$이다.

즉, 다음과 같은 규칙이 성립한다.

$$S(3, 2)=S(2, 1)+2S(2, 2)$$

-1 -1 -1

$S(n, k)=S(n-1, k-1)$
$+kS(n-1, k)(1<k<n)$

보기 $S(5, 2)=S(4, 1)+2S(4, 2)=1+2 \cdot 7=15$

문제 4 $S(5, 1)=1$, $S(5, 2)=15$임을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $S(6, 2)$ (2) $S(7, 2)$

실생활

문제 5 $S(6, 3)=90$임을 이용하여 8명의 여행객을 3개의 호텔에 나누어 투숙하게 하는 경우의 수를 구하여라. (단, 각각의 호텔에 적어도 한 명의 여행객은 반드시 투숙한다.)

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

서로 다른 n개의 공을 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 분할의 수를 기호로 나타내어 보자.

자연수의 분할이란 무엇인가?

탐구 활동

모양과 크기가 같은 사과 6개를 빈 봉지가 없도록 같은 종류의 봉지에 나누어 담으려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 6개의 사과를 두 개의 봉지에 나누어 담는 경우를 모두 나열하여 보자.
2. 6개의 사과를 세 개의 봉지에 나누어 담는 경우를 모두 나열하여 보자.

6개의 사과를 빈 봉지가 없도록 세 개의 봉지에 나누는 방법은 자연수 6을 순서를 무시하고 세 자연수의 합으로 나타내는 방법과 같다. 예를 들어 각각의 봉지에 2개, 1개, 3개를 넣었다면 이는 $6=2+1+3$으로 생각할 수 있다. 이때 $1+2+3$, $2+1+3$, $3+1+2$ 등은 모두 같은 것으로 본다.

한편 자연수 6을 6보다 작은 자연수의 합으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}6&=5+1=4+2=3+3\\&=4+1+1=3+2+1=2+2+2\\&=3+1+1+1=2+2+1+1\\&=2+1+1+1+1\\&=1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

이와 같이 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 한다.

일반적으로 자연수 n을 k $(k \le n)$개의 자연수의 합

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k \text{ (단, } n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k > 0)$$

로 나타내는 자연수의 분할을 기호

$$\boldsymbol{P(n, k)}$$

로 나타낸다.

$P(n, k)$에서 P는 Partition(분할)의 첫 글자이다.

따라서 자연수 n의 분할의 수는

$$P(n, 1)+P(n, 2)+\cdots+P(n, n)$$

이다.

보기 $P(6, 1)=1$, $P(6, 2)=3$, $P(6, 3)=3$, $P(6, 4)=2$, $P(6, 5)=1$, $P(6, 6)=1$이므로 자연수 6의 분할의 수는 $1+3+3+2+1+1=11$이다.

문제 6 자연수 5의 분할의 수를 구하여라.

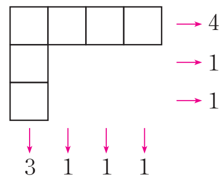
자연수 n에 대하여

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

를 n의 분할이라고 하면 첫 번째 행에 n_1개, 두 번째 행에 n_2개, $\cdots$, k번째 행에 n_k개의 정사각형 그림을 그릴 수 있다.

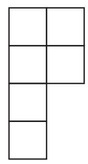
예를 들어 6의 한 분할인 $6=4+1+1$은 다음과 같은 그림으로 나타낼 수 있다.

분할을 나타내는 그림을 페러 다이어그램(Ferrers diagram)이라고 한다.

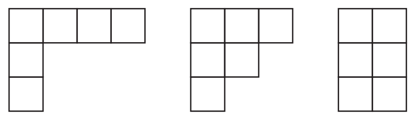


여기서 4, 1, 1은 그림의 각 가로줄에 있는 정사각형의 개수이다. 한편 이 그림의 각 세로줄의 정사각형의 개수는 각각 3, 1, 1, 1이므로 6은 $6=3+1+1+1$과 같이 분할되기도 한다. 이와 같이 주어진 분할을 그림으로 나타내면 분할을 보다 쉽게 이해할 수 있다.

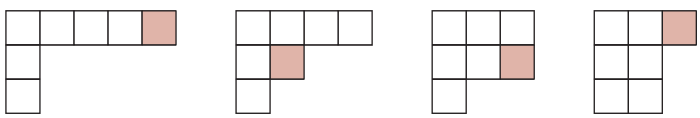
예제 03 자연수 6의 한 분할인 $2+2+1+1$을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 때, $P(6,\ 3)$에 해당하는 그림에 정사각형 한 개를 더 그려 넣어 $P(7,\ 3)=4$임을 확인하여라.



풀이 $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로 $P(6,\ 3)$에 해당하는 그림은 오른쪽 그림과 같이 3가지이다.



각각의 그림에 정사각형 한 개를 더 그리면 중복되는 그림을 제외하고 다음과 같이 모두 4가지임을 알 수 있다.



문제 7 분할의 수 $P(6,\ 4)$를 그림으로 나타내고, 이를 이용하여 $P(7,\ 4)$를 구하여라.

실생활

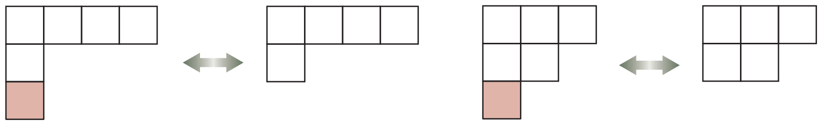
문제 8 2010년 월드컵에서는 공인구로 자블라니를 사용하였다. 자블라니 8개를 같은 종류의 상자 3개에 나누어 담는 경우의 수를 구하여라.

(단, 빈 상자는 없도록 한다.)

이제 $P(n, k)(1 \le k \le n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

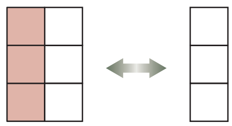
예를 들어 $n=6$, $k=3$이면 $4+1+1$, $3+2+1$, $2+2+2$이므로 $P(6, 3)=3$이다.

여기서 1이 분할 중 하나인 경우는 $4+1+1$, $3+2+1$이고 각각 다음 그림과 같이 $4+1$, $3+2$로 대응된다. 이 경우 분할의 수는 $P(5, 2)$이다.



$4+1+1$ $\quad$ $4+1$ $\quad$ $3+2+1$ $\quad$ $3+2$

또 1이 분할 중 하나가 아닌 경우는 $2+2+2$이므로 다음 그림과 같이 $1+1+1$로 대응된다. 이 경우 분할의 수는 $P(3, 3)$이다.



$2+2+2$ $\quad$ $1+1+1$

따라서 $P(6, 3)=P(5, 2)+P(3, 3)=2+1=3$이다.

즉, 다음과 같은 규칙이 성립한다.

$$-1 \qquad -1$$
$$P(6, 3)=P(5, 2)+P(3, 3)$$
$$6-3$$

● $P(n, k)=P(n-1, k-1)$
$+P(n-k, k)(1<k<n)$

보기 $P(7, 5)=P(6, 4)+P(2, 5)$이고 $P(2, 5)=0$이므로 $P(7, 5)=P(6, 4)=2$

문제 9 분할의 수 $P(8, 5)$를 구하여라.

창의 up

같은 종류의 연필 11자루를 같은 종류의 필통 3개에 넣을 때, 각 필통에 2자루 이상의 연필이 있도록 넣는 경우의 수는 같은 종류의 연필 5자루를 같은 종류의 필통 3개에 넣는 경우의 수와 같음을 설명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

모양과 크기가 같은 사탕을 같은 종류의 봉지에 나누어 담는 경우의 수는 자연수의 분할의 수로 구할 수 있다. 모양과 크기가 같은 7개의 사탕을 같은 종류의 봉지 3개에 나누어 담으려고 할 때, 빈 봉지가 없도록 나누어 담는 경우의 수를 구하여 보자.

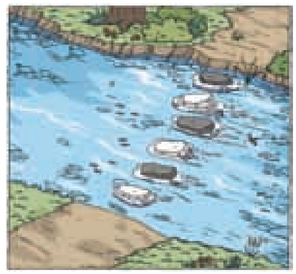
02 이항정리

- 이항정리를 이해한다.
- 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

이항정리란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 개울을 건너려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 첫째 돌과 둘째 돌, 셋째 돌과 넷째 돌, 다섯째 돌과 여섯째 돌을 짝을 지어서 각각의 짝지어진 2개의 돌 중 반드시 하나만 딛고 간다.)



1. 흰 돌 3개만 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?
2. 흰 돌 2개와 검은 돌 1개를 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?
3. 흰 돌 1개와 검은 돌 2개를 딛고 가는 경우는 몇 가지인가?

조합을 이용하여 다항식 $(a+b)^3$의 전개식을 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

다항식 $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$의 전개식에서 a^2b는 오른쪽 그림과 같이 $(a+b)^3$의 세 인수 $(a+b)$, $(a+b)$, $(a+b)$ 중 2개에서 a를 택하고, 남은 1개에서 b를 택하여 곱한 경우이므로 a^2b의 계수는 세 인수 $(a+b)$ 중 한 인수에서 b를 택하는 조합의 수 ${}_3C_1=3$과 같다.

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
a	a	b	a^2b
a	b	a	a^2b
b	a	a	a^2b

마찬가지 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3C_0$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$이 됨을 알 수 있다.

따라서 $(a+b)^3$의 전개식은 조합을 이용하여

$$(a+b)^3={}_3C_0\,a^3+{}_3C_1\,a^2b+{}_3C_2\,ab^2+{}_3C_3\,b^3$$

으로 나타낼 수 있다.

일반적으로 $(a+b)^n$의 전개식은 자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{개}}$$

이고, 이때 항 $a^{n-r}b^r$은 n개의 인수 $(a+b)$ 중 r개에서 b를 택하고 나머지 $(n-r)$개에서 a를 택하여 곱한 것이다. 즉, n개에서 r개를 택하는 조합의 수만큼 나타나므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 ${}_nC_r$이다.

따라서 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n$$

으로 나타낼 수 있다. 이것을 **이항정리**라고 한다.

P. 31 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 $(a+b)^n$의 전개식에서 a^rb^{n-r}과 $a^{n-r}b^r$의 계수는 같다.

$(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_n\mathrm{C}_0,\ {}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_r,\ \cdots,\ {}_n\mathrm{C}_n$$

을 **이항계수**라 하고, $(r+1)$번째 항 ${}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이항정리

자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}(a+b)^n&={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n\\&=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r\end{aligned}$$

보기 $(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0\,a^4+{}_4\mathrm{C}_1\,a^3b+{}_4\mathrm{C}_2\,a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3\,ab^3+{}_4\mathrm{C}_4\,b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

문제 1 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3)^5$ (2) $(a-2b)^4$

(3) $(2a-3b)^4$ (4) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

등식 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$를 이용하면 $(a+b)^n$의 전개식의 이항계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 나타낼 수 있다.

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}\quad {}_{n-1}\mathrm{C}_r \;\to\; {}_n\mathrm{C}_r$$

	1	$n=0$	1
$(a+b)^1$의 계수	${}_1\mathrm{C}_0\ \ {}_1\mathrm{C}_1$	$n=1$	$1\ \ 1$
$(a+b)^2$의 계수	${}_2\mathrm{C}_0\ \ {}_2\mathrm{C}_1\ \ {}_2\mathrm{C}_2$	$n=2$	$1\ \ 2\ \ 1$
$(a+b)^3$의 계수	${}_3\mathrm{C}_0\ \ {}_3\mathrm{C}_1\ \ {}_3\mathrm{C}_2\ \ {}_3\mathrm{C}_3$	$n=3$	$1\ \ 3\ \ 3\ \ 1$
$(a+b)^4$의 계수	${}_4\mathrm{C}_0\ \ {}_4\mathrm{C}_1\ \ {}_4\mathrm{C}_2\ \ {}_4\mathrm{C}_3\ \ {}_4\mathrm{C}_4$	$n=4$	$1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

이와 같이 이항계수를 배열한 것을 **파스칼의 삼각형**이라고 한다.

한편 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$이므로 파스칼의 삼각형은 좌우 대칭임을 알 수 있다.

보기 $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

문제 2 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^6$ (2) $(x-2)^5$

$(a+b)^n$의 전개식에서 $n \geq 4$일 때는 각 항의 계수를 파스칼의 삼각형을 이용하여 구하는 것이 편리하다.

이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결하여 보자.

예제 01 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

풀이 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은 ${}_7C_r\, x^{7-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_7C_r\, x^{7-r}\dfrac{2^r}{x^r}={}_7C_r\, 2^r x^{7-2r}$

$7-2r=3$, $r=2$이므로 x^3의 계수는 ${}_7C_2\, 2^2=84$

답 84

문제 3 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하여라.

예제 02 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

증명 이항정리에 의하여 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$

이때 식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

문제 4 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n=0$

(2) n이 홀수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

예제 2의 결과를 이용하여 원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수를 구하는 방법을 설명하여 보자.

[해답 p.165]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 중에서 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 분할인 것을 모두 찾아라.

01 분할
집합의 분할

㉠ $\{1,\ 5\},\ \{2\},\ \{3\}$	㉡ $\{1,\ 2,\ 3\},\ \{4,\ 5\}$
㉢ $\{1,\ 3,\ 4\},\ \{2\},\ \{5\}$	㉣ $\{1,\ 4\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\ \{5\}$

2 원소가 5개인 집합을 두 개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수 $S(5,\ 2)$를 구하여라.

01 분할
집합의 분할

3 자연수 8을 네 개의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수 $P(8,\ 4)$를 구하여라.

01 분할
자연수의 분할

4 다항식 $(x+y)^9$의 전개식에서 x^4y^5의 계수를 구하여라.

02 이항정리

5 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하여라.

02 이항정리

(1) $(a-b)^4$　　(2) $(x+2)^5$

중단원 기본

수준별 학습

1 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 집합 X를 공집합이 아닌 서로소인 세 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수

(2) 집합 X를 각각 두 개의 원소를 가지고 있는 세 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수

01 분할
집합의 분할

2 모양과 크기가 같은 7개의 귤을 같은 종류의 상자 3개에 나누어 담으려고 한다. 이때 3개 이하의 상자에 담는 경우의 수를 a, 빈 상자가 없도록 3개의 상자에 담는 경우의 수를 b라고 할 때, ab의 값을 구하여라.

01 분할
자연수의 분할

3 다항식 $(x-a)^5$의 전개식에서 x의 계수와 상수항의 합이 0일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

02 이항정리

4 $\left(ax^2+\dfrac{2}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수가 6일 때, 양수 a의 값을 구하여라.

02 이항정리

5 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=512$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

02 이항정리

중단원 실력

수준별 학습

1 30030을 1보다 큰 세 자연수의 곱으로 표현하는 경우의 수를 구하여라.
(단, 곱하는 순서는 무시한다.)

01 분할
집합의 분할

2 자연수 8에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 3개 이하의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수
(2) 3 이하의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수

01 분할
자연수의 분할

3 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라.

02 이항정리

4 $a_n={}_nC_0+\frac{1}{4}{}_nC_1+\left(\frac{1}{4}\right)^2{}_nC_2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n{}_nC_n$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

02 이항정리

5 서로 다른 색상의 색연필 31자루 중에서 16자루 이상을 택하여 그림을 색칠하려고 한다. 이때 색연필을 택하는 경우의 수를 구하여라.

02 이항정리

수행 과제

영 다이어그램과 영 타블로

영 다이어그램(Young diagram)이란 위의 가로줄의 칸의 수가 아래의 가로줄의 칸의 수보다 많거나 같은 도형을 말한다. 영 타블로(Young tableau)란 영 다이어그램에서 가로줄을 따라 오른쪽으로 가면서 숫자가 커지거나 같게, 세로줄을 따라 아래로 가면서 숫자가 커지게 주어진 자연수를 채워 넣은 것을 말한다.

다음 그림의 영 다이어그램에 숫자 1, 2, 3, 4를 채워 넣어 영 타블로를 만들려고 한다.

〈영 다이어그램〉

1	1	1	2
2	2	3	
3	4	4	
4			

〈영 타블로〉

첫 번째 세로줄에는 반드시 (1, 2, 3, 4)를 채워 넣어야 한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보아라.

| 과 제 | 1 두 번째 세로줄을 채우는 경우를 모두 적어 보아라.

| 과 제 | 2 두 번째 세로줄을 (1, 3, 4)로 채웠을 때, 영 타블로를 완성하는 경우의 수를 구하여 보아라.

| 과 제 | 3 영 타블로를 완성하는 모든 경우의 수를 구하여 보아라.

대단원 학습 내용 정리

1 순열과 조합

경우의 수

(1) 합의 법칙: 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$$m+n$$

(2) 곱의 법칙: 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

$$m\times n$$

순열

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수는

$${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$

원순열

서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_n}{n}=(n-1)!$$

중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 순열의 수는

$${}_n\Pi_r=n^r$$

같은 것이 있는 순열

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

조합

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0\le r\le n)$$

중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합의 수는

$${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

2 분할과 이항정리

집합의 분할

n개의 원소를 가지고 있는 집합을 k $(k\le n)$개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 집합의 분할이라 하고, 이 분할의 수를 기호로 $S(n, k)$와 같이 나타낸다.

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k)$$

자연수의 분할

자연수 n을 k $(k\le n)$개의 자연수의 합

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k \quad (\text{단, } n_1\ge n_2\ge\cdots\ge n_k>0)$$

와 같이 나타내는 것을 자연수의 분할이라 하고, 이 분할의 수를 기호로 $P(n, k)$와 같이 나타낸다.

$$P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)$$

이항정리

자연수 n에 대하여

$$(a+b)^n$$
$$={}_n\mathrm{C}_0\,a^n+{}_n\mathrm{C}_1\,a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2\,a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\,b^n$$
$$=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$$

용어와 기호 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 계승, 원순열, 중복순열, 조합, 중복조합, 집합의 분할, 자연수의 분할, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\mathrm{P}_r$, $n!$, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{C}_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$, $S(n, k)$, $P(n, k)$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 두 개의 주사위 A, B를 던질 때, 나온 눈의 수의 차가 3 이상인 경우의 수는?

① 6　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 12

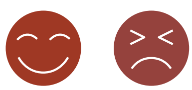
2 남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는?

① 60　② 64　③ 68　④ 72　⑤ 76

3 3쌍의 부부가 6인용 원탁에 둘러앉아 식사를 하려고 한다. 이때 부부끼리 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

4 오른쪽 그림과 같이 앞면과 뒷면이 서로 다른 단추가 4개 있다. 4개의 단추를 모두 늘어놓는 경우의 수는? (단, 모두 찡그린 표정인 경우는 제외한다.)



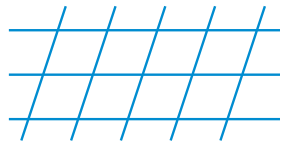
〈앞〉　〈뒤〉

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

5 세 문자 a, b, c를 각각 2번, 3번, 2번씩 사용하여 7개의 문자로 된 문자열을 만들려고 한다. 만들 수 있는 서로 다른 문자열의 개수는?

① 210　② 420　③ 840　④ 1680　⑤ 3360

6 오른쪽 그림과 같이 3개의 평행선과 5개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선으로 이루어지는 모든 평행사변형의 개수는?



① 30　② 40　③ 50　④ 60　⑤ 70

7 부등식 $x+y+z<5$를 만족시키는 양의 정수인 해의 개수는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

8 원소가 5개인 집합을 4개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수는?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 24

9 다항식
$(1+x+\cdots+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)$
의 전개식에서 x^7의 계수는?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

10 11^{11}을 100으로 나눈 나머지는?

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

서답형

11 ${}_n\mathrm{C}_3=2\cdot{}_n\mathrm{P}_2$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

12 남학생 5명, 여학생 5명이 원탁에 둘러앉을 때, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수를 구하여라.

13 사과 주스 10병을 같은 종류의 상자 4개에 나누어 담아 포장하려고 한다. 빈 상자가 없도록 나누어 담는 경우의 수를 구하여라.

14 $N=69^5+5\cdot69^4+10\cdot69^3+10\cdot69^2+5\cdot69+1$의 약수의 개수를 구하여라.

|서|술|형|

15 현수는 MP3 플레이어에 5개의 곡 A, B, C, D, E를 저장하려고 한다. 곡이 재생되는 순서를 정하려고 할 때, A가 처음에 오지 않고, E가 마지막에 오지 않도록 하는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}\mathrm{C}_1+{}_{2k}\mathrm{C}_3+{}_{2k}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2k}\mathrm{C}_{2k-1})$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

개념 넓히기

집합의 분할과 자연수의 분할

[1] 일반적으로 $S(n, k)(1 \leq k \leq n)$를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

n개의 원소를 가지고 있는 집합을 k개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 것은 n명을 k개의 모둠으로 나누는 것과 같다.

n명을 1개의 모둠으로 나누는 경우는 한 가지이고, n명을 n개의 모둠으로 나누는 경우도 한 가지이므로

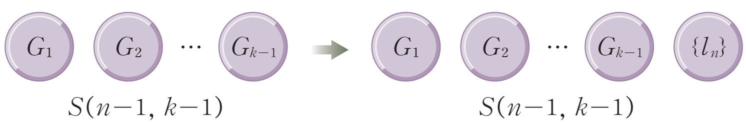
$$S(n, 1)=1, S(n, n)=1$$

이다.

$1<k<n$일 때, n명의 사람 $l_1, l_2, \cdots, l_n$을 k개의 모둠으로 나누는 경우는 다음과 같이 l_n이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우와 l_n이 다른 사람과 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

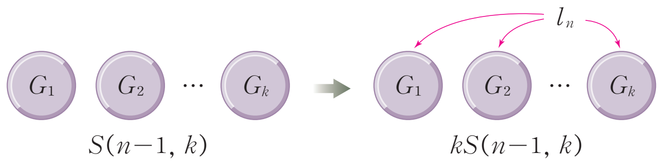
(i) l_n이 혼자서 한 개의 모둠을 이루는 경우

$l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$을 $(k-1)$개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_{k-1}$로 분할함으로써 k개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_{k-1}, \{l_n\}$을 얻을 수 있으므로 이 경우 집합의 분할의 수는 $S(n-1, k-1)$이다.



(ii) l_n이 다른 사람과 함께 한 개의 모둠을 이루는 경우

$l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$을 k개의 모둠 $G_1, G_2, \cdots, G_k$로 분할하면 집합의 분할의 수는 $S(n-1, k)$이다. 이제 l_n을 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 중 어느 한 모둠에 포함시킬 수 있으므로 이 경우 집합의 분할의 수는 $kS(n-1, k)$이다.



따라서 (i), (ii)에 의하여

$$S(n, k)=S(n-1, k-1)+kS(n-1, k)\ (1<k<n)$$

임을 알 수 있다.

[2] **일반적으로** $P(n, k)\ (1\leq k\leq n)$**를 구하는 방법에 대하여 알아보자.**

자연수 n을 1개의 자연수의 합으로 나타내는 경우는 한 가지이고, 자연수 n을 n개의 자연수의 합으로 나타내는 경우도 한 가지이므로

$$P(n, 1)=1,\ P(n, n)=1$$

이다.

$1<k<n$일 때, 자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 경우는 다음과 같이 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나인 경우와 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나가 아닌 경우의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나인 경우

1을 제외하면 나머지는 $(n-1)$의 $(k-1)$ 분할이 되므로 이 경우 n의 분할의 수는 $P(n-1, k-1)$이다.

(ii) 1이 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 중 하나가 아닌 경우

n의 k 분할 $n_1, n_2, \cdots, n_k$의 그림에서 $n_i\geq 2\ (1\leq i\leq k)$이므로 첫 번째 열을 제외하면 나머지는 $(n-k)$의 k 분할과 같다. 따라서 이 경우 n의 분할의 수는 $P(n-k, k)$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$P(n, k)=P(n-1, k-1)+P(n-k, k)\ (1<k<n)$$

임을 알 수 있다.

M+ Real Life

수 학 실 생 활

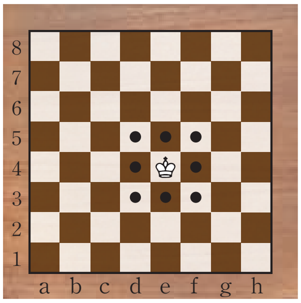
체스

서양 장기인 체스는 7세기 인도의 '차투랑가' 라는 게임에서 유래되었다. 인도의 차투랑가는 처음에 페르시아로 전해졌고, 페르시아로부터 무역 경로를 따라 러시아와 콘스탄티노플로 전해졌다. 또 바이킹이 이것을 스칸디나비아로 가져왔으며, 무어(Moor) 인들이 스페인을 통해 유럽에 전해 주었다. 이렇게 여러 나라를 거치는 동안 이 게임은 나라마다 규칙이 바뀌기도 하고, 피스(piece)라고 불리는 말의 이름과 모양도 다양하게 변했다.

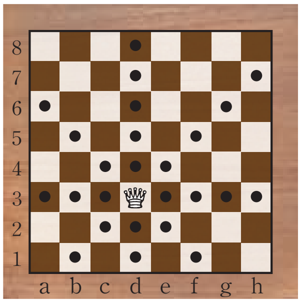
오늘날의 체스 판은 어두운 색 칸과 밝은 색 칸이 엇갈려서 64칸으로 되어 있는데, 파일(file)이라고 하는 8개의 세로줄과 랭크(rank)라고 하는 8개의 가로줄이 있다.

두 경기자는 각각 모두 16개의 말을 가지고 게임을 하는데 백은 밝은 색의 말을, 흑은 어두운 색의 말을 가지게 되며 상대방을 향하여 말을 배치한다. 첫 번째 줄에는 생긴 모양에 따라 5가지로 나뉜 킹(king), 퀸(queen), 룩(rook), 비숍(bishop), 나이트(knight)의 말을 배치하고, 이 5가지 말이 놓인 앞줄인 두 번째 줄에는 폰(pawn)의 말을 배치한다.

각각의 말을 움직이는 방법은 다음과 같다.



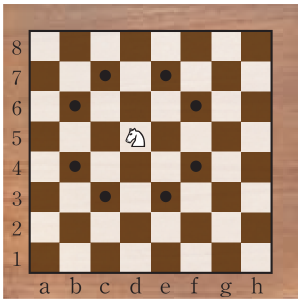
킹: 주위 8개의 칸 가운데 어느 곳으로나 1번에 1칸씩만 움직인다.



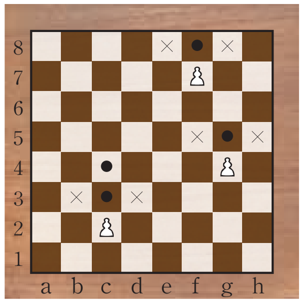
퀸: 룩과 비숍의 힘을 모두 지니고 있어 가로, 세로, 대각선으로 움직인다.

룩: 우리나라 장기에서 차(車)와 같이 움직이는 말로 가로줄과 세로줄을 따라 마음대로 움직인다.

비숍: 대각선으로 마음대로 움직인다.



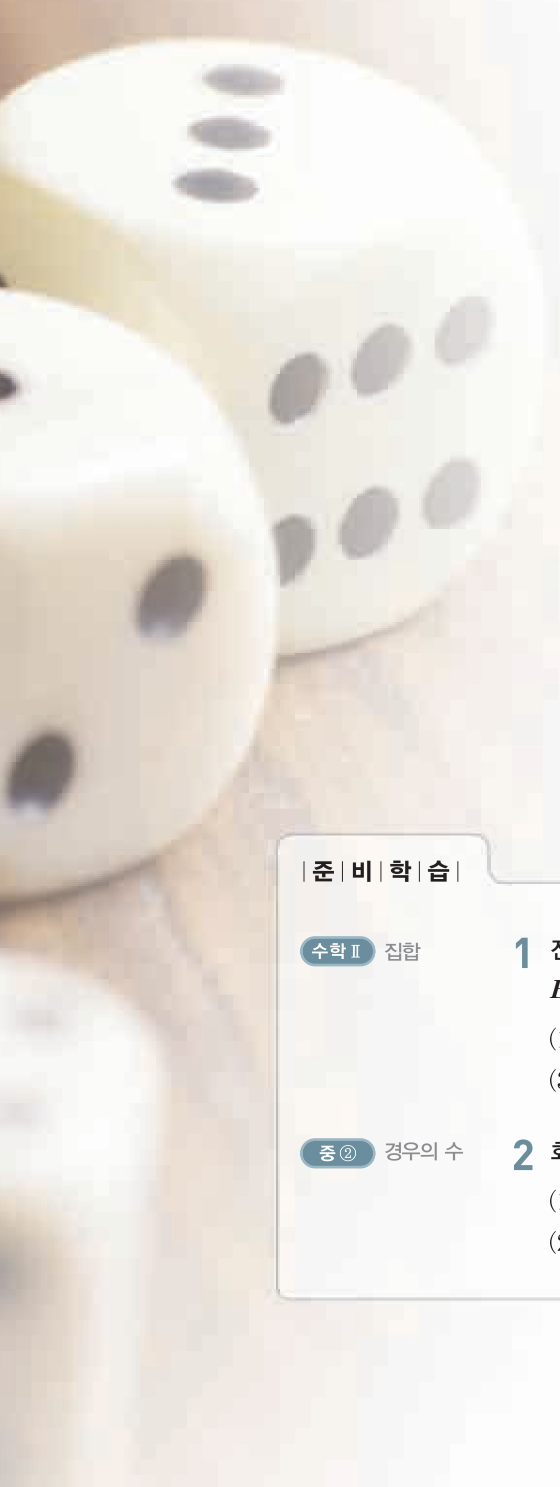
나이트: L자 모양으로 움직이는데 가로줄(또는 세로줄)로 2칸을 움직이고, 그와 직각을 이루는 세로줄(또는 가로줄)로 1칸 이동한다. 나이트가 움직일 때 그 중간에 어떤 말이 있더라도 이를 뛰어넘을 수 있다.



폰: 원칙적으로 세로줄로 1번에 1칸씩 전진할 수 있지만 처음에는 2칸 이동하는 것도 가능하다. 만일 폰이 체스 판에서 상대방 말이 놓인 처음 칸까지 이동하였다면 퀸, 룩, 나이트, 비숍 중 하나가 될 수 있다.

한편 각 경기자가 각각 단 한 번씩만 말을 움직여도 체스에는 총 400가지의 경우의 수가 생긴다. 이는 두 번의 말 이동이 끝난 뒤에는 19만 7742가지, 세 번씩 움직인 다음에는 1억 2100만 가지 등 게임이 전개되는 경우의 수는 빠른 속도로 늘어난다. 한 연구에 의하면 게임이 전개되는 총 경우의 수는 약 10^{100000}에 이르고, 이중 10^{120}가지가 비교적 일반적으로 전개되는 게임이라고 한다.

10^{120}가지는 얼마나 많은 것일까? 전 세계 인구의 머리카락을 다 모은 개수는 약 10^{15}개이며 전 세계에 있는 모래알의 숫자는 약 10^{23}개라고 한다. 또한 광활한 우주공간 속에 존재하고 있는 원자의 개수도 약 10^{81}개로 추정되고 있다. 이들 3가지를 모두 합쳐도 일반적으로 행해지는 체스 게임의 경우의 수만큼도 되지 않는 것이다. 말판 위에 늘어선 32개의 체스 말이 이토록 천문학적인 경우의 수를 지녔다는 것이 경이롭기까지 하다.



일상생활 속에서 쉽게 볼 수 있는 주사위에는

수많은 확률이 숨어 있다.

확률

| 준 | 비 | 학 | 습 |

수학 Ⅱ 집합

1 전체집합 $U=\{n \mid n$은 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 $A=\{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$

(3) $A-B$ (4) A^C

중② 경우의 수

2 회원이 10명인 동아리에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 회장 1명, 부회장 1명을 선출하는 경우의 수

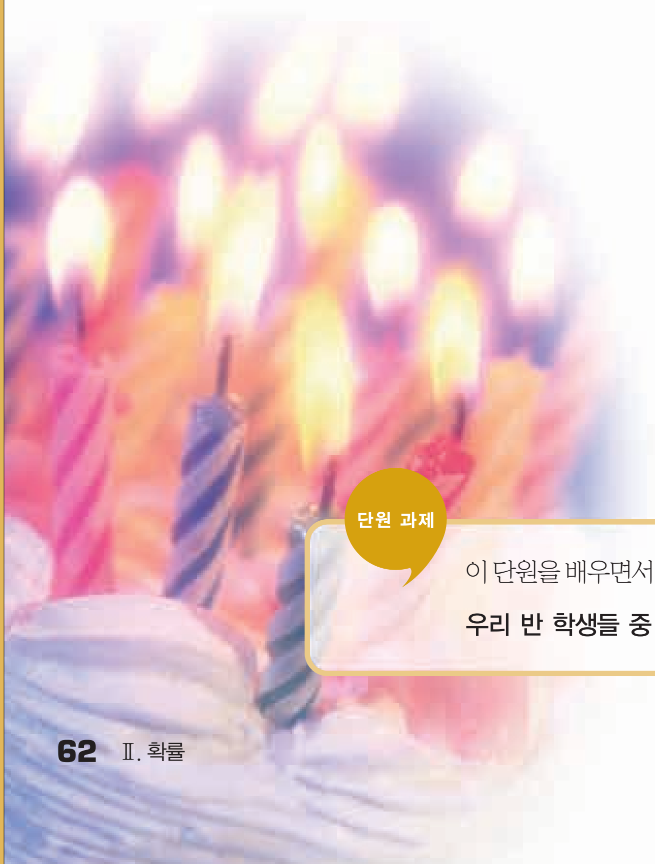
(2) 대표 2명을 선출하는 경우의 수

1

확률의 뜻과 활용

재미있는 일상 속의 확률

우리 일상생활 속에는 확률로 구할 수 있는 문제가 많이 있는데, 이런 문제 중에는 생일과 관련한 문제도 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 76쪽

우리 반 학생들 중 생일이 서로 같은 사람이 있을 확률은 얼마일까?

01 확률의 뜻

● 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.

시행과 사건이란 무엇인가?

생각 열기

주사위

기원전 49년에 카이사르가 “주사위는 던져졌다.”라고 선언하고 루비콘 강을 건너 폼페이우스를 격파한 유명한 이야기에서도 등장하는 주사위는 아주 오래전부터 일상 속에서 사용되어 왔다. 기원전 3400년 전 이집트에서는 지금과 똑같은 모양의 주사위를 사용하였고, 통일 신라 시대에는 목제 주령구라고 부르는 14면체의 주사위를 사용하였다. 보통 주사위는 정육면체로 만들어진 것을 말하는데, 최근에는 각 면이 나올 확률이 같은 다면체를 모두 주사위라고 부른다.

목제 주령구

탐구 활동

한 개의 주사위를 던져서 나오는 모든 눈의 수의 집합을 S라고 하자. 집합 S의 부분집합에 대하여 홀수인 눈의 수의 집합을 A, 소수인 눈의 수의 집합을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 집합 S의 원소를 모두 말하여 보자.

2. 홀수이거나 소수인 눈의 수의 집합을 집합 A, B를 이용하여 나타내어 보자.

3. 홀수이면서 소수인 눈의 수의 집합을 집합 A, B를 이용하여 나타내어 보자.

4. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 반드시 **2**에서 나타낸 집합에 속한다고 할 수 있는가?

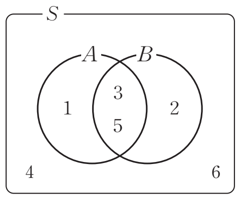
주사위를 던져서 나오는 눈의 수는 우연에 의하여 결정된다. 이처럼 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

이때 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다. 또 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 근원사건이라고 한다.

● 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다. 일반적으로 사건과 그 사건을 나타내는 집합은 구별하지 않고 모두 사건이라고 한다.

한편 어떤 시행에서 반드시 일어나는 사건을 전사건이라 하고, 이것은 표본공간과 같다. 또 결코 일어나지 않는 사건을 공사건이라 하고, 이것은 공집합 $\varnothing$로 나타낸다.

보기 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 나오는 눈의 수의 표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고, 이 시행에서 홀수인 눈이 나오는 사건 A는 $A=\{1, 3, 5\}$, 소수인 눈이 나오는 사건 B는 $B=\{2, 3, 5\}$이다.
한편 이 시행의 근원사건은 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$이다.



모든 근원사건의 개수는 표본공간 S의 원소의 개수 $n(S)$와 같다.

문제 1 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S와 서로 같은 면이 나오는 사건 A를 각각 구하여라. (단, 동전의 앞면은 H, 뒷면은 T로 나타낸다.)

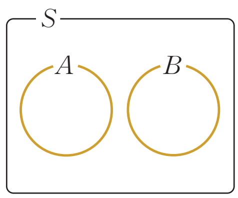
표본공간 S의 부분집합인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 합사건이라 하고, 기호로 $A\cup B$와 같이 나타낸다.

또 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 곱사건이라 하고, 기호로 $A\cap B$와 같이 나타낸다.

한편 두 사건 A, B에 대하여 A와 B 중에서 어느 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어나지 않을 때, 즉

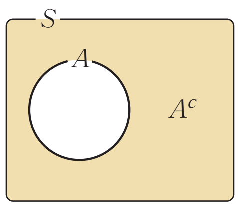
$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 두 사건 A와 B는 서로 **배반사건**이라고 한다.



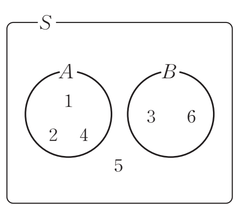
배반사건은 서로 동시에 일어나지 않는다.

그리고 어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다. 이때 $A\cap A^C=\varnothing$이므로 A와 A^C은 서로 배반사건이다.



A^C에서 C는 Complementary event(여사건)의 첫 글자이다.

보기 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 A, 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{3, 6\}$이고, 이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.
한편 $A^C=\{3, 5, 6\}$이고, $B^C=\{1, 2, 4, 5\}$이다.



문제 2 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 9의 약수인 사건을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 사건 A와 B는 서로 배반사건인가?

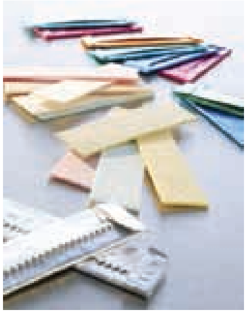
(2) 사건 A, B의 여사건 A^C, B^C을 각각 구하여라.

수학적 확률이란 무엇인가?

생각 열기

껌(gum)

껌은 300년경에 중앙아메리카에 살고 있던 마야 족이 사포딜라라는 나무의 수액으로 만든 고체화된 치클을 씹은 데서 유래하였다. 껌은 오랫동안 치클로 만들어왔지만 경제성과 상품성을 이유로 현대의 많은 껌들은 치클 대신 화학적으로 합성하여 만들어 낸 '초산 비닐 수지'라는 물질로 만들어진다.



탐구 활동

모양과 크기가 같은 5종류의 껌 a, b, c, d, e가 각각 1개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 껌들 중에서 a와 d만 치클을 사용하여 만들었고, 나머지는 초산 비닐 수지를 사용하여 만들었다고 한다. 주머니에서 한 개의 껌을 꺼낼 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 표본공간 S의 원소의 개수를 구하여 보자.
2. 치클로 만든 껌을 꺼내는 사건을 A라고 할 때, 사건 A의 원소의 개수를 구하여 보자.
3. 사건 A가 일어날 확률을 구하고, 그 이유를 말하여 보자.

탐구 활동에서 주머니 속의 5종류의 껌 중 1개의 껌을 꺼낼 때, 각각의 껌이 나올 가능성은 모두 같은 정도로 기대된다. 즉, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되므로 사건 A가 일어날 확률은

$$\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

로 구할 수 있다.

이와 같이 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 확률이라 하고, 기호로

$$\mathbf{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

● $\mathrm{P}(A)$에서 P는 Probability(확률)의 첫 글자이다.

일반적으로 어떤 시행에서 표본공간 S가 m개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

● $n(A)$는 사건 A의 근원사건의 개수이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{m}$$

와 같이 정의하고, 이것을 사건 A의 **수학적 확률**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

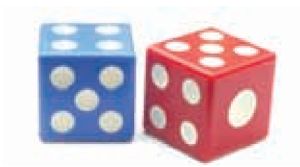
수학적 확률

어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

예제 01

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 8이 될 확률을 구하여라.



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 표본공간 S는

$$S=\{(1,1),(1,2),\cdots,(6,5),(6,6)\}$$

이므로 $n(S)=36$

또 나오는 눈의 수의 합이 8인 사건을 A라고 하면

$$A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

이므로 $n(A)=5$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

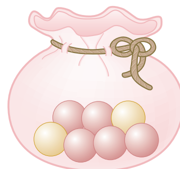
답 $\frac{5}{36}$

문제 3 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 4 또는 8이 될 확률을 구하여라.

문제 4 한 개의 동전을 네 번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 많을 확률을 구하여라.

예제 02

노란 구슬 2개와 빨간 구슬 5개가 들어 있는 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 노란 구슬 1개와 빨간 구슬 2개가 나올 확률을 구하여라.



풀이 7개의 구슬 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는

$$ {}_7C_3=35 $$

또 노란 구슬 2개 중에서 1개를 꺼내고, 빨간 구슬 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$$ {}_2C_1\times{}_5C_2=2\times10=20 $$

따라서 구하는 확률은

$$ \frac{20}{35}=\frac{4}{7} $$

답 $\frac{4}{7}$

문제 5 10개의 제비 중에서 2개의 당첨 제비가 들어 있는 상자가 있다. 이 중에서 2개의 제비를 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 당첨 제비가 하나도 없을 확률

(2) 당첨 제비가 1개일 확률

발전

문제 6 남자 3명과 여자 5명이 임의로 원탁에 둘러앉을 때, 남자끼리는 서로 이웃하지 않을 확률을 구하여라.

창의 up

단팥빵, 크림빵, 야채빵이 각각 3개, 2개, 1개가 담겨 있는 접시가 있다. 세 사람이 각각 접시에 담겨 있는 빵을 임의로 1개씩 먹을 때, 두 사람만 같은 종류의 빵을 먹을 확률을 구하는 방법을 설명하여라.

통계적 확률이란 무엇인가?

생각 열기

윷놀이

윷놀이는 삼국 시대 이전부터 전해 오는 우리나라 고유의 민속놀이로 부여(夫餘)에서 돼지, 개, 양, 소, 말을 5개의 부락에 나누어 주고 그 가축들을 경쟁적으로 번식시키려 했던 데에서 비롯된 놀이라고 한다. 그에 연유하여 윷놀이에서 도, 개, 걸, 윷, 모는 각각 돼지, 개, 양, 소, 말을 상징한다.

탐구 활동

다음 표는 한 개의 윷짝을 던지는 시행을 여러 번 반복하였을 때, 윷의 평평한 면이 나온 횟수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

시행 횟수(n)	100	300	500	800	1000
평평한 면이 나온 횟수(r_n)	57	183	297	481	598
상대도수$\left(\frac{r_n}{n}\right)$	0.57				

1. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.
2. 시행 횟수가 커지면 상대도수는 어떻게 될지 추측하여 보자.

수학적 확률은 어떤 시행에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대된다는 가정 아래에서 정의하였다. 그러나 자연 현상이나 사회 현상 중에는 어떤 사건의 결과가 같은 정도로 일어날 것이라고 기대하기 어려운 경우가 많이 있다. 예를 들어 비가 올 확률, 야구 선수가 안타를 칠 확률, 공장에서 생산되는 제품이 불량품일 확률 등은 수학적 확률로 정의할 수 없다.

이와 같은 경우는 많은 자료를 수집하여 조사하거나 시행을 여러 번 반복하여 얻은 상대도수를 관찰함으로써 그 사건이 일어나는 전체적인 경향을 알아볼 수 있다.

일반적으로 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라고 하자. 이때 n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 **통계적 확률**이라고 한다.

통계적 확률을 경험적 확률이라고도 한다.

그러나 실제로 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

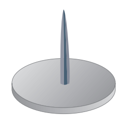
한편 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어날 통계적 확률 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

통계적 확률

일정한 조건에서 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수 r_n에 대하여 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

보기 누름 못을 1000번 던졌을 때 오른쪽 그림과 같이 침이 위를 향하도록 떨어지는 경우가 438번이었다고 하면, 누름 못의 침이 위를 향하도록 떨어질 통계적 확률은 $\frac{438}{1000}=0.438$이다.



문제 7 2011년 우리나라에서 태어난 신생아는 471265명이었고, 그중 쌍둥이로 태어난 신생아는 13142명이었다. 신생아가 쌍둥이로 태어날 확률을 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

〈출처: 통계청〉

예제 03

오른쪽 표는 우리나라 국민 7600명을 대상으로 1일 평균 인터넷 이용 시간을 조사하여 나타낸 것이다. 우리나라 국민 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 1일 평균 인터넷 이용 시간이 5시간 이상일 확률을 구하여라.

이용 시간(시간)	인원 수(명)
0이상~1미만	342
1 ~2	2166
2 ~3	2972
3 ~4	745
4 ~5	463
5 ~6	562
6 ~	350
합계	7600

〈출처: 통계청, 2010년〉

풀이 조사 대상자 7600명 중에서 인터넷 이용 시간이 5시간 이상인 사람의 수는

$562+350=912$(명)이므로 구하는 확률은

$$\frac{912}{7600}=0.12$$

답 0.12

문제 8

오른쪽 표는 어느 시기에 승용차를 구입한 사람 1000명을 대상으로 구입한 승용차의 제조 회사를 조사하여 나타낸 것이다. 이 사람 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 구입한 승용차의 제조 회사가 A사일 확률을 구하여라.

제조 회사	인원 수(명)
A사	487
B사	91
C사	64
D사	341
E사	17
합계	1000

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

어느 야구 선수가 지난 시즌까지 통산 3800타수 중에서 1197개의 안타를 기록하였다고 한다. 이 선수가 이번 시즌에 400타수를 기록할 것이라고 예상될 때, 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여 보자.

02

확률의 기본 성질

- 확률의 기본 성질을 이해한다.
- 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
- 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

확률의 기본 성질에는 어떤 것이 있는가?

생각 열기

월드컵 축구 대회와 상금

월드컵 축구 대회는 국제 축구 연맹(FIFA)이 올림픽 중간 연도를 택해 4년마다 한 번씩 개최하는 세계 선수권 대회이다. 세계 최대의 이벤트라고 할 수 있는 월드컵은 상금이 어마어마하다. 2010년 남아공 월드컵의 총 상금은 3억 9800만 달러(약 4967억 원)로 2006년 독일 월드컵의 총 상금 3억 3200만 스위스 프랑(약 2660억 원)보다 80 % 이상 증가하였다.

탐구 활동

2010년 남아공 월드컵 본선에 진출한 32개국은 최종 성적에 따라 다음과 같이 상금을 차등 지급 받았다고 한다. 남아공 월드컵 본선에 진출한 32개국 중에서 임의로 한 나라를 선택하였을 때, 물음에 답하여 보자.

성적	우승	준우승	4강	8강	16강	조별 리그 탈락
상금(만 달러)	3100	2500	2100	1900	1000	900
팀 수	1	1	2	4	8	16

1. 선택한 나라가 받은 상금이 900만 달러 이상일 확률을 구하여 보자.
2. 선택한 나라가 받은 상금이 3500만 달러 이상일 확률을 구하여 보자.
3. 선택한 나라가 받은 상금이 1500만 달러 이상 3000만 달러 미만일 확률을 구하여 보자.

표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S에서 성립하는 확률의 기본적인 성질에 대하여 알아보자.

어떤 시행에서 표본공간 S의 임의의 사건 A는 S의 부분집합이므로

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

이다. 이때 위의 부등식의 양변을 $n(S)$로 나누면

$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le 1$$

이므로 수학적 확률의 정의에 의하여

$$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$$

이다. 특히 반드시 일어나는 사건 S와 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여

$$\mathrm{P}(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$\mathrm{P}(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = 0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 기본 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

(1) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

(2) $A=S$이면 $\mathrm{P}(A)=1$

(3) $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$

보기 빨간 공 2개, 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼낼 때,

(1) 파란 공이 1개 이상 나오는 경우는 반드시 일어나는 사건이므로 파란 공이 1개 이상 나올 확률은 1이다.

(2) 빨간 공만 3개 나오는 경우는 절대로 일어나지 않는 사건이므로 빨간 공이 3개 나올 확률은 0이다.

문제 1 네 개의 숫자 1, 3, 5, 7 중에서 서로 다른 세 개의 숫자를 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 다음을 구하여라.

(1) 이 수가 홀수일 확률

(2) 이 수가 135보다 작을 확률

확률의 덧셈정리란 무엇인가?

탐구 활동

상준이는 쿠키 5개와 도넛 3개가 들어 있는 상자에서 임의로 3개를 꺼내 먹으려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 3개가 모두 같은 종류일 확률을 구하여 보자.
2. 3개가 모두 쿠키인 사건을 A, 모두 도넛인 사건을 B라고 할 때, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 각각 구하여 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$를 구하여 보자.
3. 1, 2의 결과를 비교하여 보자.

표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 두 사건 A, B에 대하여 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률을 구하여 보자.

표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

이므로 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

이다. 특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

이다.

● 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로 $n(A\cap B)=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

● 세 사건 A, B, C가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$ $=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

문제 2 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구하여라.

예제 01

어느 반 학생 36명의 통학 수단을 조사하였더니 버스를 이용하는 학생은 18명, 지하철을 이용하는 학생은 15명, 버스와 지하철을 모두 이용하는 학생은 6명이었다. 이 반 학생 36명 중에서 임의로 한 명을 선택하였을 때, 그 학생이 버스 또는 지하철을 타고 통학할 확률을 구하여라.

풀이 36명의 학생 중에서 임의로 한 학생을 선택하였을 때, 선택된 학생이 버스를 이용하는 사건을 A, 지하철을 이용하는 사건을 B라고 하면

$$n(A)=18,\ n(B)=15,\ n(A\cap B)=6$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{15}{36},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{18}{36}+\frac{15}{36}-\frac{6}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

문제 3 1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 20장의 카드 중에서 임의로 한 장의 카드를 선택할 때, 다음을 구하여라.

(1) 카드에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률

(2) 카드에 적힌 수가 4의 배수이거나 소수일 확률

문제 4 남자 3명, 여자 5명 중에서 2명을 뽑을 때, 모두 남자이거나 모두 여자일 확률을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

4명의 학생 천호, 현우, 준수, 민호가 체육 대회에서 400 m 이어달리기 경기의 반 대표로 출전하였다. 제비뽑기로 순서를 정할 때, 천호가 가장 먼저 달리거나 민호보다 나중에 달리게 될 확률을 구하여 보자.

여사건의 확률이란 무엇인가?

탐구 활동

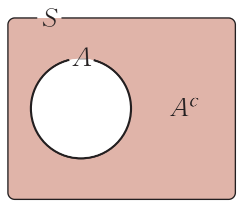
상자 안의 인형 10개 중 2개가 불량품이라고 한다. 이 상자 안에서 2개의 인형을 동시에 꺼낼 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 불량품이 하나도 뽑히지 않을 확률을 구하여 보자.

2. 불량품이 적어도 하나 뽑힐 확률을 구하여 보자.

3. **1**, **2**에서 구한 확률을 더하여 보자.

표본공간 S에 대하여 사건 A의 여사건 A^C의 확률을 구하여 보자.



$A\cap A^C=\varnothing$이므로 두 사건 A와 A^C은 서로 배반사건이고, $A\cup A^C=S$이므로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$$

따라서

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

여사건의 확률

임의의 사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

‘적어도 ~인 사건’, ‘~ 이상인 사건’, ‘~ 이하인 사건’ 등은 여사건을 이용할 수 있다.

보기 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 3개의 동전 모두 뒷면이 나오는 사건을 A라고 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$이므로 앞면이 1개 이상 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

문제 5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수가 서로 다를 확률을 구하여라.

예제 02

유통 기한이 5일 남은 우유가 10개, 2일 남은 우유가 4개 있는 진열대에서 임의로 3개의 우유를 선택할 때, 유통 기한이 2일 남은 우유가 1개 이상 포함될 확률을 구하여라.

풀이 유통 기한이 5일 남은 우유만 3개 선택하는 사건을 A라고 하면, 유통 기한이 2일 남은 우유가 1개 이상 포함되는 사건은 사건 A의 여사건 A^C이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{30}{91}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{30}{91}=\frac{61}{91}$$

답 $\frac{61}{91}$

문제 6 10원, 50원, 100원, 500원짜리 동전이 각각 1개씩 있다. 이 4개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 나온 동전의 금액의 합이 50원 이상일 확률을 구하여라.

발전

문제 7 전체 직원이 30명인 어느 회사에서는 직원들을 A, B, C 세 등급으로 나누어 성과급을 차등 지급하고 있고, 각 등급에 속하는 인원 수의 비율은 3 : 4 : 3이라고 한다. 이 회사 직원 중에서 임의로 4명을 선택하였을 때, A 등급을 받은 직원이 적어도 1명 포함되어 있을 확률을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

우리 반에 생일이 서로 같은 학생이 있을 확률이 매우 작을 것처럼 보이지만 직접 계산하여 보면 그 확률이 크다는 것을 알 수 있다.
1년이 365일이라고 할 때, 우리 반 학생 35명 중에서 생일이 서로 같은 두 사람이 있을 확률을 공학용 계산기를 이용하여 소수 셋째 자리까지 구하여 보자.

[해답 p.168]

중단원 기초

1 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 다음 세 사건 A, B, C 중에서 서로 배반사건인 것을 모두 찾아라.

01 확률의 뜻
시행과 사건

> A: 소수가 적힌 카드가 나오는 사건
> B: 4의 약수가 적힌 카드가 나오는 사건
> C: 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건

2 5명의 회원 A, B, C, D, E로 구성된 모임에서 여행을 가려고 한다. 제비뽑기로 운전할 사람 2명을 미리 정하려고 할 때, A가 포함될 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻
수학적 확률

3 흰 바둑돌 2개와 검은 바둑돌 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 바둑돌을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

02 확률의 기본 성질

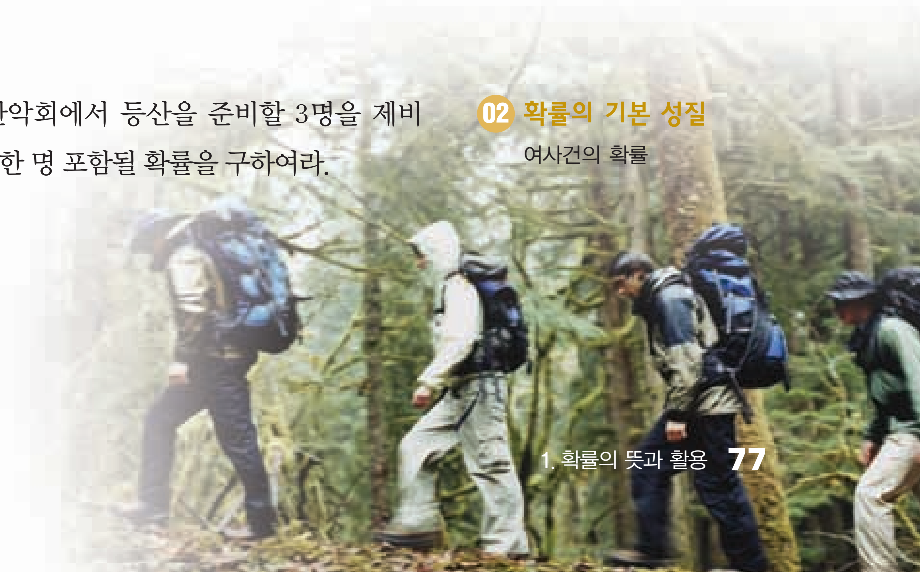
(1) 흰 바둑돌이 3개 나올 확률
(2) 검은 바둑돌이 1개 이상 나올 확률
(3) 흰 바둑돌 1개, 검은 바둑돌 2개가 나올 확률

4 주사위 한 개를 던져 나온 눈의 수가 2의 배수 또는 4의 약수일 확률을 구하여라.

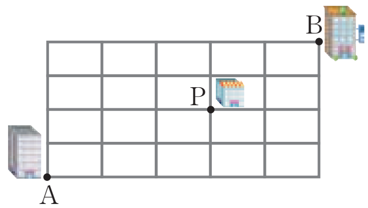
02 확률의 기본 성질
확률의 덧셈정리

5 남자 4명과 여자 6명으로 이루어진 산악회에서 등산을 준비할 3명을 제비뽑기로 정하려고 할 때, 남자가 적어도 한 명 포함될 확률을 구하여라.

02 확률의 기본 성질
여사건의 확률

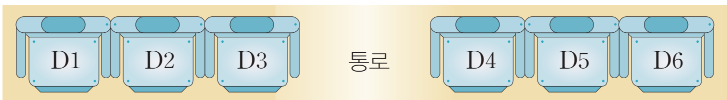


1 오른쪽 그림과 같은 도로가 있다. A 지점에서 B 지점으로 최단 거리로 가려고 할 때, P 지점을 거쳐서 가는 확률을 구하여라.



01 확률의 뜻
수학적 확률

2 주영이와 종수를 포함한 영화 감상 동아리 회원 6명이 영화를 보기 위하여 예매한 표의 좌석 배치도는 다음 그림과 같다. 6명의 회원이 임의로 표를 받아 해당하는 좌석에 앉을 때, 주영이와 종수가 이웃하여 앉게 될 확률을 구하여라. (단, 통로에 의해 인접하는 경우는 이웃하지 않은 것으로 본다.)

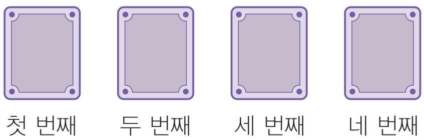


01 확률의 뜻
수학적 확률

3 빨간 구슬과 파란 구슬이 모두 7개 들어 있는 주머니에서 2개의 구슬을 꺼내 색을 확인하고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 7번에 한 번 꼴로 2개가 모두 빨간 구슬이었다. 이때 주머니 속에는 몇 개의 빨간 구슬이 들어 있다고 볼 수 있는지 구하여라.

01 확률의 뜻
통계적 확률

4 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 9장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 4장의 카드를 꺼내 순서대로 나열하여 네 자리 수를 만들었다. 이때 이 수가 2의 배수이거나 5의 배수일 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.)



02 확률의 기본 성질
확률의 덧셈정리

5 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 x, y, z라고 할 때, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$일 확률을 구하여라.

02 확률의 기본 성질
여사건의 확률

중단원 실력

1 1부터 9까지의 자연수가 각각 적힌 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내려고 한다. 소수가 적힌 공이 나오는 사건을 A, 짝수가 적힌 공이 나오는 사건을 B라고 할 때, A^C과 C는 서로 배반사건이 되고, B와 C도 서로 배반사건이 되도록 하는 사건 C의 개수를 구하여라. (단, $C \neq \varnothing$)

01 확률의 뜻
시행과 사건

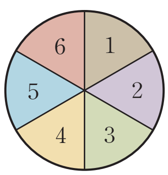
2 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 하자. 두 함수 f, g가 $f(x)=x^2+2ax+b$, $g(x)=2x-1$일 때, 모든 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립할 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻
수학적 확률

3 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 중 임의로 한 개를 택할 때, 그 함수의 공역과 치역이 같을 확률을 구하여라.

01 확률의 뜻
수학적 확률

4 오른쪽 그림과 같이 1부터 6까지의 자연수가 적힌 원반 모양의 과녁에 화살을 4번 던져서 맞힌 수를 차례로 a, b, c, d라고 할 때, $a \leq b < c \leq d$가 성립할 확률을 구하여라.



02 확률의 기본 성질
확률의 덧셈정리

5 20개의 제비 중 r개의 당첨 제비가 들어 있는 상자에서 3개의 제비를 동시에 꺼낼 때, 그중에서 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\frac{29}{57}$라고 한다. 이때 r의 값을 구하여라.

02 확률의 기본 성질
여사건의 확률

2 조건부확률

합리적인 분배

프랑스의 수학자인 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)은 친구인 도박사 드 메레(de Méré, C. ; 1607～1684)에게서 다음과 같은 편지를 받았다.

실력이 서로 비슷한 A, B 두 사람이 32피스톨씩 걸고 내기를 하고 있었네. 승부에서 1번 이기면 1점을 얻고, 먼저 3점을 얻은 사람이 64피스톨을 몽땅 가지기로 했네. 그런데 A가 2점, B가 1점을 얻은 시점에서 사정이 생겨 부득이하게 시합을 중지하게 되었는데, 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 가장 합리적이라고 보는가?

*피스톨: 옛날의 스페인 금화

파스칼은 생각 끝에 드 메레에게 해결 방법을 써서 편지를 보냈다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 90쪽

파스칼이 드 메레에게 보낸 편지에는 어떤 해결 방법이 쓰여 있을까?

01 조건부확률

- 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
- 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

조건부확률이란 무엇인가?

생각 열기

흡연과 폐암

폐암의 원인 중 약 85 %는 흡연에 의한 것으로, 흡연은 폐암의 발생 위험을 13배 증가시킨다고 알려져 있다. 흡연의 양과 기간도 폐암에 걸릴 확률과 관련이 있다. 매일 한 갑의 담배를 40년간 피운 사람은 담배를 전혀 피우지 않은 사람에 비하여 폐암에 걸릴 확률이 20배나 높다는 연구가 있다. 또한 20년간 매일 두 갑의 담배를 피워 온 남자라면 폐암으로 사망할 확률이 60~70배 증가한다고 한다.

이러한 담배의 해악은 여성에게 더욱 두드러지게 나타나는데, 남자와 같은 정도로 흡연에 노출되었다면 남자보다 여자가 폐암에 걸릴 확률이 1.5배 높다고 한다.

탐구 활동

다음 표는 어느 병원에서 폐암 진단을 받은 환자 100명을 대상으로 성별에 따른 과거 흡연 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 100명의 환자 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 물음에 답하여 보자.

	흡연	비흡연	합계
남자	61	7	68
여자	27	5	32
합계	88	12	100

1. 뽑힌 환자가 과거 흡연하였을 확률을 구하여 보자.
2. 뽑힌 환자가 과거 흡연하였던 남자일 확률을 구하여 보자.
3. 뽑힌 환자가 과거 흡연을 하였을 때, 그 환자가 남자일 확률을 구하는 방법에 대하여 말하여 보자.

탐구 활동에서 과거 흡연하였던 환자가 뽑히는 사건을 A라 하고, 남자가 뽑히는 사건을 B라고 하자. 그러면 과거 흡연을 하였던 환자가 남자인 사건은 $A\cap B$이다.

$\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$는 사건 A를 새로운 표본공간으로 생각하고 표본공간 A에서 사건 $A\cap B$가 일어날 확률을 의미한다.

임의로 뽑은 환자가 과거 흡연을 하였다고 할 때, 그 환자가 남자일 확률은 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률이므로 $\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{61}{88}$이다.

일반적으로 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 확률이 0이 아닌 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부확률**이라 하고, 기호로

$$\mathbf{P(B|A)}$$

와 같이 나타낸다.

표본공간 S에서 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다. 그런데

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)},\ P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

이므로

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad (\text{단, } P(A)>0)$$

보기 두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\dfrac{1}{5}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$이면

$$P(B|A)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$$

문제 1 두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{7}{10}$, $P(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$일 때, $P(A|B)$를 구하여라.

예제 01 K 고등학교 신입생 중에서 D 중학교 출신이 차지하는 비율은 $20\,\%$이고, D 중학교 출신 남학생은 전체의 $9\,\%$라고 한다. 이 고등학교 신입생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 D 중학교 출신이었을 때, 이 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

풀이 K 고등학교 신입생 중에서 임의로 한 학생을 뽑을 때, 그 학생이 D 중학교 출신인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{100}$$

따라서 구하는 확률은 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{1}{5}}=\frac{9}{20}$$

답 $\frac{9}{20}$

문제 2 한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나왔을 때, 그 눈의 수가 소수일 확률을 구하여라.

문제 3 선물용 과자 세트에 들어 있는 초콜릿과 쿠키의 비율은 각각 $20\,\%$, $30\,\%$이다. 이때 아몬드가 들어 있는 초콜릿은 전체의 $5\,\%$라고 한다. 이 선물용 과자 세트에서 임의로 고른 과자가 초콜릿이었을 때, 아몬드가 들어 있는 초콜릿일 확률을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

어느 전자 우편 사이트는 ‘스팸 메일(spam mail) 차단’ 기능을 사용하면 광고성 우편 중에서 $95\,\%$를 차단하지만, 정상 우편도 $2\,\%$ 차단한다고 한다. 이 기능을 이용하여 광고성 우편 100통과 정상 우편 100통을 검사하였다. 이 중에서 임의로 뽑은 한 통의 우편이 차단된 우편이었을 때, 이 우편이 광고성 우편일 확률을 구하여 보자.

확률의 곱셈정리란 무엇인가?

탐구 활동

다음 표는 어느 DVD 대여점이 가지고 있는 액션 영화와 코미디 영화의 DVD 개수를 조사하여 나타낸 것이다. 원희가 이 중에서 임의로 한 편을 선택하려고 할 때, 물음에 답하여 보자.

	액션 영화	코미디 영화	합계
한국 영화	150	200	350
외국 영화	300	150	450
합계	450	350	800

1. 원희가 한국 영화 한 편을 선택할 확률을 구하여 보자.

2. 원희가 한국 영화 중에서 한 편을 선택하였다고 할 때, 그 영화가 코미디 영화일 확률을 구하여 보자.

3. 원희가 한국 코미디 영화 한 편을 선택할 확률을 구하여 보고, **1**, **2**에서 구한 확률과 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

조건부확률 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 의 양변에 $\mathrm{P}(A)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

를 얻는다.

같은 방법으로 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ 의 양변에 $\mathrm{P}(B)$를 곱하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

를 얻는다.

따라서 조건부확률을 이용하면 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 확률을 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) \text{ (단, } \mathrm{P}(A)>0\text{)}$$
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \text{ (단, } \mathrm{P}(B)>0\text{)}$$

문제 4 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$를 구하여라.

예제 02

상자 안에 모양과 크기가 같은 자두 맛 사탕이 6개, 딸기 맛 사탕이 4개 들어 있다. 이 상자 안에서 차례로 2개의 사탕을 꺼낼 때, 2개 모두 자두 맛 사탕일 확률을 구하여라.

(단, 꺼낸 사탕은 다시 넣지 않는다.)

풀이 첫 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕인 사건을 B라고 하자.

첫 번째에 자두 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

첫 번째 꺼낸 사탕이 자두 맛 사탕일 때, 두 번째 꺼낸 사탕도 자두 맛 사탕일 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

문제 5 어느 학급의 청소 당번 10명이 제비뽑기로 복도 청소 2명과 교실 청소 8명을 정하려고 한다. 두 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 할 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

사고력 기르기

추론

▶ 의사소통

문제 해결

다음 대화를 보고 몇 번째로 제비를 뽑는 것이 가장 유리한지 토의하여 보자.

02

사건의 독립과 종속

● 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

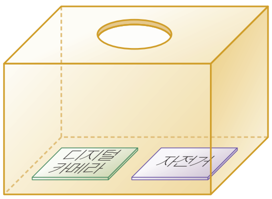
사건의 독립과 종속이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

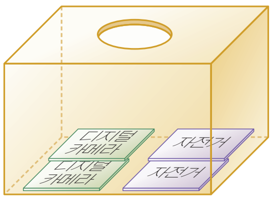
어느 동아리 행사에서 최종 선발된 4명의 회원에게 다음과 같은 두 가지 방법으로 추첨을 통해 상품인 디지털 카메라 2대와 자전거 2대를 지급하려고 한다. 물음에 답하여 보자.

상자 안에 디지털 카메라, 자전거라고 적힌 카드를 각각 1장씩 넣고, 한 사람씩 차례로 꺼낸다. 이때 꺼낸 카드는 지급할 상품이 남아 있으면 다시 넣고 남아 있지 않으면 넣지 않는다.



〈방법 1〉

상자에 디지털 카메라, 자전거라고 적힌 카드를 각각 2장씩 넣고 한 사람씩 차례로 꺼낸다. 이때 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.



〈방법 2〉

1. 〈방법 1〉과 〈방법 2〉의 각각의 경우에 대하여 첫 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼냈을 때, 두 번째 회원도 자전거가 적힌 카드를 꺼낼 확률을 구하여 보자.
2. 〈방법 1〉과 〈방법 2〉의 각각의 경우에 대하여 첫 번째 회원의 결과가 두 번째 회원의 결과에 영향을 미치는지 말하여 보자.

어떤 사건이 일어나거나 일어나지 않을 확률이 다른 사건이 일어나거나 일어나지 않을 확률에 영향을 미치는 경우가 있고, 그렇지 않은 경우가 있다.

탐구 활동에서 첫 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A, 두 번째 회원이 자전거가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라고 하자.

〈방법 1〉의 경우는 첫 번째 꺼낸 카드를 다시 상자에 넣기 때문에 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않는다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

이 성립한다.

이와 같이 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않을 때, 즉 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 **독립**이라고 한다.

두 사건 A와 B가 서로 독립이면 확률의 곱셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

가 성립한다.

역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고 $\mathrm{P}(A)>0$이면 확률의 곱셈정리에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)$이다.

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

한편 〈방법 2〉의 경우는 첫 번째 꺼낸 카드를 다시 상자에 넣지 않기 때문에 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미친다. 즉,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}$$

가 성립한다.

이와 같이 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미칠 때, 즉 $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^C)$일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 **종속**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

독립사건의 곱셈정리

두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0,\ \mathrm{P}(B)>0)$$

예제 01

한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나오는 사건을 A, 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B, 6의 약수의 눈이 나오는 사건을 C라고 하자. 이때 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하여라.

(1) 사건 A와 B　　(2) 사건 B와 C　　(3) 사건 A와 C

두 사건 A와 B가 서로 독립이면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
두 사건 A와 B가 서로 종속이면
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

풀이 $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{2}{3}$$

또 $A\cap B=\{5\}$, $B\cap C=\{6\}$, $A\cap C=\{2, 3\}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$$

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이므로 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$이므로 사건 B와 C는 서로 종속이다.

(3) $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 사건 A와 C는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 종속 (3) 독립

문제 1 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 소수인 사건을 A, 짝수인 사건을 B, 12의 약수인 사건을 C라고 하자. 이때 다음 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 말하여라.

(1) 사건 A와 B　　(2) 사건 B와 C　　(3) 사건 A와 C

발전

문제 2 두 사건 A와 B가 서로 독립일 때, 다음 두 사건도 서로 독립임을 설명하여라.
(단, $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

(1) 사건 A와 B^C　　(2) 사건 A^C과 B　　(3) 사건 A^C과 B^C

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

명제 '두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.'가 참인지 거짓인지 토의하여 보자. (단, $0<\mathrm{P}(A)<1$, $0<\mathrm{P}(B)<1$)

독립시행의 확률이란 무엇인가?

탐구 활동

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타낼 때, 가능한 모든 경우를 아래 표에 나타내어 보자.
2. 각각의 사건이 일어날 확률을 구하여 아래 표에 나타내어 보자.
3. 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률을 구하여 보자.

1회	2회	3회	4회	확률
○	○	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 동일한 조건으로 같은 시행을 반복할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 미치지 않는 경우가 있다.

이와 같이 어떤 시행을 반복하는 경우 매 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 **독립시행**이라고 한다.

탐구 활동에서 한 개의 주사위를 4번 던질 때, 1의 눈이 2번 나오는 경우는 ${}_4C_2$가지이다.

이때 주사위를 던지는 각 시행은 서로 독립이고, 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 1의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 각 경우가 일어날 확률은 모두 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$이다.

그리고 ${}_4C_2$가지의 사건은 서로 배반사건이므로 한 개의 주사위를 4번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 2번 나올 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$${}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

이다.

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

예제 02 어느 사격 선수는 총을 한 발 사격할 때, 과녁의 10점 부분에 맞힐 확률이 $\frac{7}{10}$이라고 한다. 이 선수가 5발을 사격하여 과녁의 10점 부분에 3번 맞힐 확률을 구하여라.

풀이 5발을 사격하여 과녁의 10점 부분에 3번 맞힐 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{7}{10}\right)^3\left(\frac{3}{10}\right)^2=10\times\frac{343}{1000}\times\frac{9}{100}=\frac{3087}{10000}$$

답 $\frac{3087}{10000}$

문제 3 어느 야구팀의 투수는 공을 던졌을 때, 80 %는 스트라이크가 되고 나머지 20 %는 볼이 된다고 한다. 이 투수가 던진 4개의 공 중에서 3개가 스트라이크가 될 확률을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

파스칼은 부득이하게 중간에 중지한 시합의 상금의 분배에 관한 드 메레의 질문이 적힌 편지를 받고 A는 48피스톨, B는 16피스톨을 나누어 가지면 된다고 답장을 보냈다. 파스칼의 해결 방법이 맞는지 A와 B가 이길 확률을 각각 구하여 알아보자.

중단원 기초

1 서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 하자. $a+b\geq 10$일 때, $a\geq 5$일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 오른쪽 표는 어느 반의 학생 35명을 대상으로 스마트폰 사용 여부를 조사하여 나타낸 것이다. 이 학급에서 남학생 한 명을 임의로 뽑을 때, 그 학생이 스마트폰을 사용할 확률을 구하여라.

스마트폰 \ 성별	남	여	합계
사용함	12	13	25
사용 안 함	4	6	10
합계	16	19	35

01 조건부확률

3 10개의 제비 중에 1등 제비가 한 개, 2등 제비가 두 개 들어 있다. 하영이와 민서가 순서대로 제비를 한 개씩 뽑을 때, 하영이가 2등 제비를 뽑고 민서가 1등 제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 제비는 다시 넣지 않는다.)

01 조건부확률
확률의 곱셈정리

4 세 명의 양궁 선수 A, B, C가 한 발의 활을 쏘아 과녁의 10점에 명중시킬 확률이 각각 0.7, 0.8, 0.9라고 한다. 이 세 명의 선수가 활을 한 발씩 쏘았을 때, 세 명 모두 10점에 맞히지 못했을 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

5 종철이는 문제를 풀 때 평균적으로 4문제를 풀면 3문제를 맞힌다고 한다. 5문제가 출제된 어떤 시험에서 4문제 이상 맞히면 합격이라고 할 때, 종철이가 시험에 합격할 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

[해답 p.171]

중단원 기본

수준별 학습

1 어느 반에서 축구를 좋아하는 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$이고, 축구를 좋아하는 남학생은 전체의 $\frac{2}{7}$이다. 이 반에서 임의로 뽑은 한 명이 축구를 좋아하는 학생이었을 때, 그 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 노란 공 4개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 나경이와 수현이가 순서대로 번갈아 가며 공을 한 개씩 꺼낼 때, 수현이가 먼저 빨간 공을 꺼낼 확률을 구하여라. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

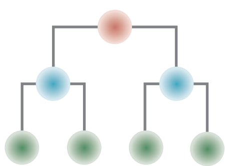
01 조건부확률
확률의 곱셈정리

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 다음 세 사건 A, B, C 중에서 서로 독립인 사건을 모두 찾아라.

> A: 첫 번째에 짝수의 눈이 나오는 사건
> B: 두 번째에 3의 배수의 눈이 나오는 사건
> C: 첫 번째는 소수의 눈이 나오고 두 번째는 홀수의 눈이 나오는 사건

02 사건의 독립과 종속

4 어느 야구 대회에 4개 팀이 참가하여 오른쪽 그림과 같이 토너먼트 방식으로 경기를 하려고 한다. 추첨으로 대진표가 결정된다고 할 때, 이 대회에 참가한 A팀과 B팀이 서로 경기를 하게 될 확률을 구하여라.
(단, 각 팀이 이길 확률은 서로 같다.)



02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

5 윷짝의 둥근 면과 평평한 면이 나올 확률이 일정한 윷짝 4개를 던질 때, '모'가 나올 확률이 0.0256이라고 한다. 이 윷짝 4개를 던질 때, '걸'이 나올 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

[해답 p.172]

중단원 실력

수준별 학습

1 주머니 A에는 파란 색연필 2자루, 초록 색연필 4자루가 들어 있고, 주머니 B에는 파란 색연필 5자루, 초록 색연필 3자루가 들어 있다. 주머니 A에서 2자루의 색연필을 동시에 꺼내 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 2자루의 색연필을 동시에 꺼냈더니 2자루 모두 초록 색연필이었다고 할 때, 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 색연필이 초록 색연필 2자루일 확률을 구하여라.

01 조건부확률

2 주머니 속에 10개의 배드민턴공이 들어 있는데 이 중 6개는 사용한 적이 없는 새 공이다. 어느 날 배드민턴을 하면서 이 주머니에서 2개의 공을 임의로 꺼내 사용하고 다시 넣었다. 그 다음 날 다시 배드민턴을 하기 위하여 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때, 2개 모두 사용한 적이 없는 새 공일 확률을 구하여라.

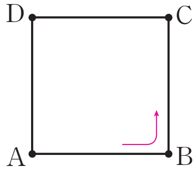
01 조건부확률
확률의 곱셈정리

3 A 음료수에는 10개 중 1개의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 써져 있는데, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 A 음료수 한 병을 사은품으로 준다고 한다. A 음료수를 5병 구입한 사람이 사은품으로 2병의 A 음료수를 받을 확률을 $\frac{3^b}{2\times 10^a}$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a와 b는 자연수이다.)

02 사건의 독립과 종속
독립사건의 곱셈정리

4 움직이는 점 P가 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 위를 주사위를 한 번 던질 때마다 다음과 같은 규칙으로 움직인다.

- 짝수의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 1만큼 움직인다.
- 홀수의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 2만큼 움직인다.



주사위를 3번 던질 때, 점 A를 출발한 점 P가 다시 점 A에 돌아올 확률을 구하여라.

02 사건의 독립과 종속
독립시행의 확률

수행 과제

몬티 홀 문제

'몬티 홀 문제'는 미국의 텔레비전 프로그램 사회자인 몬티 홀(Monty Hall)의 이름에서 유래되었다. 그 내용이 다음과 같을 때, 물음에 답하여 보자.

3개의 문이 있는데 하나의 문 뒤에는 고급 자동차가, 나머지 2개의 문 뒤에는 염소가 숨겨져 있다. 출연자는 이 3개의 문 중에서 하나를 선택하여 문 뒤에 있는 상품을 받게 되는데, 출연자가 하나의 문을 선택하면 어떤 문 뒤에 자동차가 있는지 알고 있는 사회자는 나머지 2개의 문 중에서 염소가 있는 문을 하나 열어 보여 준다. 그리고 출연자에게 자신이 선택했던 문을 바꿀 수 있는 기회를 한 번 준다. 이때 출연자는 자신이 선택했던 문을 바꾸는 것이 유리한가?

| 과 제 | **1** 웹사이트 http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm을 방문하여 선택한 문을 바꾸지 않는 경우(keep)와 선택한 문을 바꾸는 경우(change)를 300번씩 시행하여 고급 자동차를 받을 통계적 확률을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 출연자가 자신이 선택한 문을 바꾸지 않는 경우와 바꾸는 경우 중 어느 쪽이 유리한지 조건부확률을 이용해 계산하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 확률의 뜻과 활용

시행

같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰

수학적 확률과 통계적 확률

(1) 어떤 시행에서 표본공간 S의 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 수학적 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S\text{의 원소의 개수})}$$

(2) 일정한 조건에서 같은 시행을 n번 반복하였을 때 사건 A가 일어난 횟수 r_n에 대하여 시행 횟수 n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 p를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다.

확률의 기본 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

(1) $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

(2) $A=S$이면 $\mathrm{P}(S)=1$

(3) $A=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A)=0$

확률의 덧셈정리

(1) 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

여사건의 확률

임의의 사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

2 조건부확률

조건부확률

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

확률의 곱셈정리

두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) \ (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$
$$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B) \ (\text{단, } \mathrm{P}(B)>0)$$

사건의 독립과 종속

(1) 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$$

일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 독립이라고 한다.

한편 사건 A가 일어나는 것의 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미칠 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)\ne \mathrm{P}(B|A^C)$$

일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 종속이라고 한다.

(2) 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

(단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 p라고 할 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r} \ (r=0, 1, 2, \cdots, n)$$

용어와 기호 시행, 수학적 확률, 통계적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 남학생 3명과 여학생 5명이 한 줄로 설 때, 남학생끼리는 이웃하지 않을 확률은?

① $\frac{5}{28}$ ② $\frac{5}{24}$ ③ $\frac{5}{21}$
④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

2 네 사람이 가위바위보를 할 때, 단 한 번의 가위바위보로 이긴 사람 1명이 가려질 확률은?

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{14}{81}$
④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{16}{81}$

3 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

4 노란 사탕 4개, 파란 사탕 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 사탕을 꺼낼 때, 노란 사탕이 2개 이상 나올 확률은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{22}{35}$ ③ $\frac{23}{35}$
④ $\frac{24}{35}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

5 집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$의 부분집합에 대하여 원소의 개수가 3개 이상인 부분집합 중에서 하나를 임의로 선택하였을 때, 그 집합의 모든 원소의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{10}{11}$ ② $\frac{31}{33}$ ③ $\frac{94}{99}$
④ $\frac{95}{99}$ ⑤ $\frac{32}{33}$

6 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수 중 작지 않은 수가 4일 때, 두 주사위의 눈의 수의 합이 6 이하일 확률은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

7 빨간 공과 노란 공을 합해서 10개가 들어 있는 주머니에서 갑, 을이 순서대로 공을 한 개씩 꺼낼 때, 을이 빨간 공을 꺼낼 확률이 $\frac{2}{5}$라고 한다. 주머니에 들어 있는 빨간 공의 개수는?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

8 두 사건 A와 B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

9 어떤 의약품의 치유율이 $\frac{3}{5}$이라고 한다. 이 의약품으로 4명의 환자를 치료할 때, 적어도 한 명이 치유될 확률은?

① $\frac{606}{625}$　② $\frac{607}{625}$　③ $\frac{608}{625}$　④ $\frac{609}{625}$　⑤ $\frac{122}{125}$

10 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수만큼 동전을 던질 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{5}{16}$　③ $\frac{17}{64}$　④ $\frac{33}{128}$　⑤ $\frac{53}{192}$

서답형

11 지상이가 돈을 인출하기 위하여 카드의 비밀번호를 입력하려고 한다. 비밀번호는 0부터 9까지의 숫자 중 4개의 숫자로 이루어지는데, 지상이는 서로 다른 홀수만을 이용하여 비밀번호를 만들었다는 것만 기억하고 있다. 비밀번호를 세 번 연속 잘못 입력하면 돈을 인출할 수 없다고 할 때, 지상이가 돈을 인출할 확률을 구하여라. (단, 한 번 입력한 번호는 다시 입력하지 않는다.)

12 흰 바둑돌 3개, 검은 바둑돌 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 참을 말하는 한 사람과 거짓을 말하는 한 사람 중 한 명에게 주머니에서 바둑돌을 한 개 꺼내어 보여 주었더니 흰 바둑돌이라고 말하였다. 이 바둑돌이 실제로 흰 바둑돌일 확률을 구하여라.

13 자연수 1, 2, 3, 4가 적혀 있는 공이 각각 1개, 2개, 3개, 4개씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내 확인하고 다시 넣는 시행을 5회 반복할 때, 같은 수가 적힌 2개의 공을 꺼낸 횟수가 3번일 확률은 $\frac{a}{9^5}$이다. 이때 자연수 a의 값을 구하여라.

14 두 탁구팀 A, B가 결승전에서 만났다. 각 세트에서 A, B 두 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$이다. 5세트 중 3세트를 먼저 이기는 팀이 우승한다고 할 때, A팀이 우승할 확률을 구하여라.

|서|술|형|

15 주머니 A에는 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 빨간 공 3개와 파란 공 5개가 들어 있다. 먼저 주머니 A에서 카드를 한 장 꺼내 카드에 적혀 있는 수만큼 주머니 B에서 임의로 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 빨간 공이 1개일 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A^C|B^C)$을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

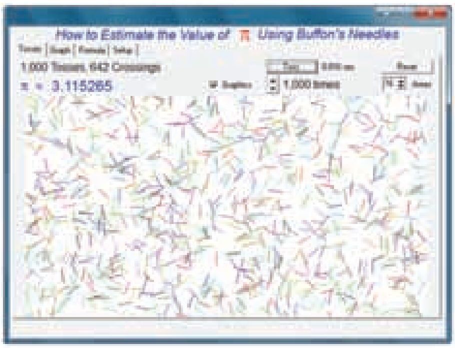
M+ Engineering

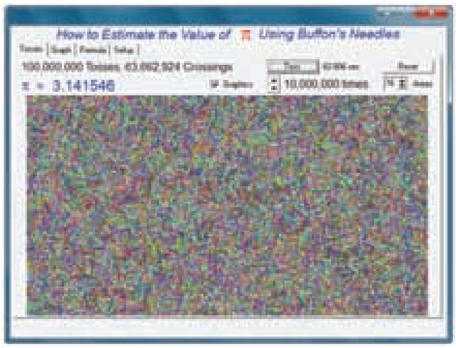
수 학 + 공 학

통계적 확률을 이용한 원주율 계산

18세기 프랑스의 수학자 뷔퐁(Buffon ; 1707~1788)은 일정한 간격의 평행선이 그어져 있는 바닥에 길이가 일정한 바늘을 떨어뜨렸을 때 바늘이 평행선에 닿을 확률을 구하는 문제를 제시하였다. 이를 '뷔퐁의 바늘 문제'라고 하는데, 뷔퐁은 평행선 사이의 간격이 1이고 바늘의 길이가 1이면 바늘이 평행선에 닿을 확률은 $\frac{2}{\pi}$가 된다는 사실을 이용하여 원주율의 값을 확률적으로 구하고자 하였다.

다음은 수학과 관련된 프로그램 등을 소개하는 웹사이트 http://www.efg2.com/Lab에서 뷔퐁의 바늘 문제를 시뮬레이션 할 수 있는 프로그램을 내려받아 바늘을 던지는 시행을 반복 수행하여 바늘이 평행선에 닿을 확률을 구하고, 이를 이용하여 원주율과 참값과의 오차를 구한 것이다.





시행 횟수	바늘이 평행선에 닿은 횟수	원주율	오차(%)
10	5	4.000000	27.324
10^2	58	3.448276	9.762
10^3	642	3.115265	0.838
10^4	6360	3.144654	0.097
10^5	63674	3.140999	0.019
10^6	637254	3.138466	0.100
10^7	6366521	3.141433	0.005
10^8	63662924	3.141546	0.001

정밀도 99 %의 검사에서 '양성'의 의미

조건부확률은 일상생활에서 자주 등장하며, 확률에 대한 정확한 지식을 가지고 있지 않으면 착각하기 쉽다. 예컨대 다음과 같은 사례가 있다.

치사율이 높은 신형 바이러스가 발생해, 이미 만 명 중 1명이 감염되었다고 하자. 어떤 사람이 이 바이러스에 감염되었는지 확인하기 위하여 정밀도가 99 %인 검사를 받았는데 검사 결과가 감염되어 있음을 뜻하는 양성이었다. 이때 오진 판정이 나올 가능성이 1 % 밖에 되지 않는 검사에서 양성 판정을 받았으므로 바이러스에 감염된 것이 거의 확실하다고 생각하기 쉽다. 하지만 확률을 통해 생각하여 보면 그렇지만은 않다.

예를 들어 100만 명이 이 검사를 받았다고 하자. 바이러스의 감염률은 만 명 중에 1명이므로, 100만 명 중에는 100명의 감염자가 있다. 정밀도 99 %의 검사는 이 100명의 감염자 중, 평균적으로 99명을 올바르게 양성으로 판정할 것이다. 그러나 감염자 중 나머지 1명은 음성으로 잘못 판정할 것이다. 즉 '가짜 음성'이다.

한편 100만 명의 대부분을 차지하는 999900명은 비감염자다. 정밀도 99 %의 검사는 999900명의 99 %에 해당하는 98만 9901명을 올바르게 음성으로 판정할 것이다. 그러나 999900명의 1 %에 해당하는 9999명은 양성으로 잘못 판정할 것이다. 즉 '가짜 양성'이다.

결국 양성으로 판정된 사람의 합계는 99+9999=10098(명)이 된다. 그러나 그 가운데 실제로 감염된 사람은 99명 뿐이다. 이는 양성으로 판정된 사람의 1 %에 지나지 않는다.

따라서 이 검사에서 양성 판정을 받았다고 해도, 실제로 감염되어 있음을 의미하는 것은 아니다. 검사를 받기 전에는 0.01 %(만 명 중 1명)였던 확률이, 검사에서 양성으로 판정되었다는 것에 의해 1 %(100명 중 1명)로 증가한 것뿐이다. 재검사가 필요하다는 것은 이러한 사정이 있기 때문이다. 또 음성 판정을 받았다고 해도, 98만 9902명 중 1명(0.0001 %)은 실제로는 감염되어 있는 셈이다.

공장에서 생산하는 자동차 중 결함이 있는 자동차의 수는
통계를 이용하여 예측할 수 있다.

통계

| 준 | 비 | 학 | 습 |

확률과 통계 수학적 확률

1 빨간 공 4개와 파란 공 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 빨간 공 1개와 파란 공 2개를 꺼낼 확률

(2) 꺼낸 공의 색깔이 모두 같을 확률

중 ③ 대푯값과 산포도

2 지민이가 친구 5명의 한 달 용돈을 조사하였더니 다음과 같았다. 한 달 용돈의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.

한 달 용돈 (단위: 천 원)

30, 25, 30, 40, 35

1

확률분포

야구 선수와 타율

야구에서 타율이란 안타 수를 타수(打數)로 나누어 계산한 수를 소수 넷째 자리에서 반올림하여 나타낸 값이다. 타율을 말할 때에는 소수를 그대로 읽기도 하지만 일반적으로 그 소수의 첫째 자리에 '할', 소수 둘째 자리에 '푼', 소수 셋째 자리에 '리'를 붙여 읽는다.

타율이 2할 5푼인 한 선수가 어떤 야구 경기에서 이전 세 타석에서는 모두 안타 없이 물러났다고 한다. 그런데 이 선수가 다시 타석에 들어서자 해설자는 이런 말을 하였다.

"네, 이 선수는 타율이 2할 5푼인데 오늘 경기에선 지금까지 세 번 모두 안타가 없었네요. 이제는 한 방 나올 때가 되었으니 투수는 이번에 조심해야겠어요."

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

130쪽

해설자가 '이전 세 타석에서 안타가 없었으니 이제 한 방 나올 때가 되었다.'라고 한 말은 옳은 말일까?

01

확률변수와 확률분포

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다.
- 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

확률변수와 확률분포란 무엇인가?

생각 열기

카르다노

산술, 천문학, 물리학, 의학 등 여러 분야에서 많은 저작을 남긴 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)는 "위대한 술법"이라는 책에서 방정식의 음수인 근을 다루기도 하였고, 허수와 관련한 계산에도 관심을 보인 수학자였다. 또 상습 도박꾼이기도 하였던 그는 "도박사를 위한 짤막한 안내문"이라는 확률에 대한 책에 '두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합에 내기를 건다고 하면 합이 7이 되는 경우가 가장 유리하다.'는 말을 남겼다.

탐구 활동

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합을 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 주사위 A, B의 눈의 수에 따라 X가 어떤 값을 가지는지 다음 표를 완성하여 보자.

B \ A	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. 카르다노가 '두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수의 합에 내기를 건다고 하면 합이 7이 되는 경우가 가장 유리하다.'라고 한 이유를 말하여 보자.

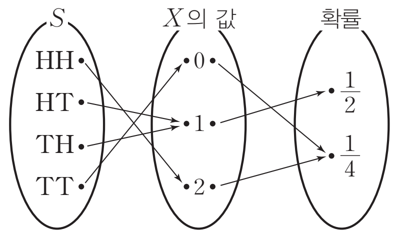
P. 63 표본공간은 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합이다.

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면 표본공간 S는 다음과 같다.

$$S=\{\mathrm{HH},\ \mathrm{HT},\ \mathrm{TH},\ \mathrm{TT}\}$$

이 시행에서 두 개의 동전에 대하여 앞면이 나온 횟수를 X라고 하면, 집합 S의 각 원소 HH, HT, TH, TT에 대응하는 X의 값은 각각 2, 1, 1, 0이다.

이때 X는 0, 1, 2 중에서 하나의 값을 가지는 변수이고, 변수 X가 각 값을 가질 확률을 표로 나타내면 다음과 같다.



X	0	1	2	합계
확률	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

확률변수는 표본공간을 정의역으로, 실수의 집합을 공역으로 하는 함수이지만 변수의 역할도 하기 때문에 확률변수라고 한다.

이와 같이 어떤 시행에서 표본공간의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 것을 **확률변수**라고 한다.

특히 확률변수 X가 가지는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있는 값에 대응될 때, X를 **이산확률변수**라고 한다.

확률변수는 보통 알파벳 대문자 X, Y, Z, ⋯로 나타내고, 확률변수가 가지는 값은 알파벳 소문자 x, y, z, ⋯로 나타낸다.

이때 확률변수 X가 어떤 값 x를 가질 확률을 기호로

$$\mathbf{P(X=x)}$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 위의 확률변수 X는 이산확률변수이고

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$$

이다.

이산확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, ⋯, x_n이고 X가 이들 값을 가질 확률이 각각 p_1, p_2, ⋯, p_n일 때, x_1, x_2, ⋯, x_n과 p_1, p_2, ⋯, p_n 사이의 대응 관계를 이산확률변수 X의 **확률분포**라고 한다.

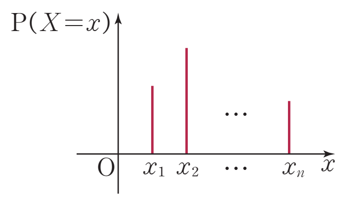
또 이 대응 관계를 나타내는 함수

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

를 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라고 한다.

한편 이산확률변수 X의 확률분포를 다음과 같이 표와 그래프로 나타낼 수 있다.

X	x_1	x_2	⋯	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	⋯	p_n	1



일반적으로 확률질량함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

일 때, 다음이 성립한다.

(1) $0\le \mathrm{P}(X=x_i)\le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)$ (단, $i\le j$)

확률변수 X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률은 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$로 나타낸다.

예제 01

흰 공 4개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내려고 한다. 주머니에서 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(3) 흰 공이 2개 이상 나올 확률을 구하여라.

풀이 (1) 이산확률변수 X의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3} \ (x=0, 1, 2, 3)$$

(2) X의 각 값에 대한 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_0}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$

이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

(3) 흰 공이 2개 이상 나올 확률은 $\mathrm{P}(X\ge 2)$이므로

$$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}=\frac{17}{42}$$

답 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3}$ $(x=0, 1, 2, 3)$ (2) 풀이 참조 (3) $\frac{17}{42}$

문제 1 남학생 4명, 여학생 3명으로 구성된 어느 고등학교의 방송부에서 새로 제작한 동영상을 편집할 2명을 제비뽑기로 정한다고 한다. 뽑힌 학생 중에서 여학생의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(3) 여학생이 1명 이하로 뽑힐 확률을 구하여라.

이산확률변수의 기댓값과 표준편차는 어떻게 구하는가?

탐구 활동

제비는 4~7월경에 알을 낳는데 새끼는 보통 부화한 지 3주 정도 지나면 둥지를 떠난다. 다음 표는 부화한 제비 100마리에 대하여 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

날의 수(일)	20	21	22	23	합계
제비의 수(마리)	10	20	40	30	100

1. 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수의 평균을 구하여 보자.
2. 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 X라고 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어 보자.

탐구 활동에서 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수의 평균은 다음과 같다.

$$\frac{20\times10+21\times20+22\times40+23\times30}{100}=21.9(\text{일}) \qquad \cdots\cdots ①$$

한편 부화한 제비 한 마리가 둥지를 떠나는 데 걸리는 날의 수를 X라고 하면 확률변수 X가 가지는 값은 20, 21, 22, 23이고, X의 각 값에 대한 확률은

$$\mathrm{P}(X=20)=\frac{10}{100},\ \mathrm{P}(X=21)=\frac{20}{100},$$

$$\mathrm{P}(X=22)=\frac{40}{100},\ \mathrm{P}(X=23)=\frac{30}{100}$$

이므로 ①의 좌변은 X의 각 값과 그 값에 대응하는 확률을 곱하여 더한 것과 같다. 즉,

$$20\times\frac{10}{100}+21\times\frac{20}{100}+22\times\frac{40}{100}+23\times\frac{30}{100}=21.9(\text{일})$$

이다.

일반적으로 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

를 확률변수 X의 **기댓값** 또는 평균이라 하고, 기호로

$$\mathbf{E}(X)$$

와 같이 나타낸다.

$\mathrm{E}(X)$에서 E는 Expectation(기댓값)의 첫 글자이다. 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는 mean(평균)의 첫 글자 m으로 나타내기도 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수의 기댓값(평균)

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$일 때, X의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

예제 02 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나온 동전의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하여라.

풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 구하는 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$$

답 1

문제 2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구하여라.

중학교에서는 도수분포에서 변량이 평균을 중심으로 흩어져 있는 정도를 나타내는 산포도로서 분산과 표준편차를 생각하였다. 마찬가지로 확률분포에서도 확률변수의 분산과 표준편차를 생각할 수 있다.

이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라고 하자.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

이때 편차 $X-m$의 제곱의 평균, 즉

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((X-m)^2)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\end{aligned}$$

를 이산확률변수 X의 분산이라 하고, 기호로

$$\mathbf{V}(X)$$

와 같이 나타낸다.

● $\mathrm{V}(X)$에서 V는 Variance(분산)의 첫 글자이다.

또 분산 $\mathrm{V}(X)$의 양의 제곱근 $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$를 이산확률변수 X의 표준편차라 하고, 기호로

$$\boldsymbol{\sigma}(X)$$

와 같이 나타낸다.

● $\sigma(X)$에서 σ(sigma)는 standard deviation(표준편차)의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자이다.

예제 03 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\left(1-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}=1$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

답 $\mathrm{V}(X)=1$, $\sigma(X)=1$

문제 3 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

문제 4 1에서 4까지의 숫자가 각각 적힌 4장의 카드가 들어 있는 주머니에서 2장의 카드를 동시에 꺼내려고 한다. 꺼낸 카드에 적힌 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

확률변수 X의 평균이 m일 때, X의 분산은 다음을 이용하여 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2mx_i+m^2)p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2m^2+m^2\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2\\&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

이상을 정리하면 다음과 같다.

이산확률변수의 분산과 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$이고, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 m이라고 할 때,

(1) 분산 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(2) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

예제 04 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{2}{4}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{2}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 5 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

문제 6 3개의 불량품이 섞여 있는 5개의 제품 중에서 임의로 2개의 제품을 고르려고 한다. 고른 제품 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X라고 할 때, X의 표준편차를 구하여라.

문제 7 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 앞면이 나올 때마다 100원의 상금을 받는다. 이 시행에서 받은 상금의 액수를 X원이라고 할 때, X의 분산과 표준편차를 구하여라.

확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차는 어떻게 구하는가?

확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때,

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$Y=aX+b\ (a,\ b\text{는 상수, } a\neq 0)$$

로 정의된 새로운 확률변수 Y에 대하여 알아보자.

$y_i=ax_i+b$라고 하면 확률변수 Y에 대하여

$$\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$$

이므로 확률변수 Y의 확률분포는 다음 표와 같다.

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	합계
$\mathrm{P}(Y=y_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

따라서 확률변수 Y의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}y_ip_i=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i\\&=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i\\&=a\mathrm{E}(X)+b\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

여기서 $\mathrm{E}(X)=m$이라고 하면 $\mathrm{E}(Y)=am+b$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\mathrm{E}(Y)\}^2p_i=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i\\&=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\\&=a^2\mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}\\&=|a|\sigma(X)\end{aligned}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)에 대하여

(1) 평균 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) 분산 $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) 표준편차 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

보기 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=3$일 때, 확률변수 $-3X+2$의 평균과 분산 및 표준편차는

$$\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+2=-13$$
$$\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)=27$$
$$\sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)=3\sqrt{3}$$

문제 8 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=8$, $\mathrm{V}(X)=2$일 때, 다음 확률변수의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $4X-1$　　　　(2) $-2X+3$

문제 9 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 확률변수 $Y=3X+1$의 평균과 표준편차를 구하여라. (단, a는 상수이다.)

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$2a$	$\frac{1}{4}$	a	1

발전

문제 10 확률변수 X의 평균이 m이고 표준편차가 σ일 때, 확률변수 Y를

$$Y=\frac{X-a}{b}$$

라고 하자. 이때 Y의 평균이 0, 표준편차가 1이 되도록 하는 상수 a, b를 m과 σ에 대한 식으로 나타내어라.

창의 up

어느 과목의 시험 점수 X의 평균이 m점이고 표준편차가 σ점일 때,

$$T=10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

을 표준 점수라고 한다. 이때 표준 점수 T의 평균과 표준편차를 각각 구하는 방법을 설명하여라.

02

이항분포

● 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

이항분포란 무엇인가?

생각 열기

항공권 초과 예약

한 연구에 따르면 고객이 항공권을 예약하고 탑승하지 않는 경우가 전체 예약의 15 %라고 한다. 가능한 한 많은 승객을 태워야 하는 항공사로서는 이와 같은 예약 변경은 큰 손해이다. 따라서 항공사는 여러 가지 확률을 분석하여 실제 좌석 수보다 더 많은 예약을 받고 있는데 이것을 '초과 예약'이라고 한다.

탐구 활동

어느 항공사의 항공권을 예약한 고객이 사전 통보 없이 비행기에 탑승하지 않을 통계적 확률이 0.15이고, 좌석 수가 60석인 비행기에 65명이 예약하였다고 한다. 사전 통보 없이 탑승하지 않은 승객의 수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. X가 가질 수 있는 값을 구하여 보자.

2. 좌석이 부족하게 되는 경우는 X가 어떤 값을 가질 때인지 구하여 보자.

3. 좌석이 3석 부족할 확률을 독립시행의 확률을 이용하여 나타내어 보자.

P. 89 어떤 시행을 반복하는 경우 매 시행마다 일어나는 사건이 서로 독립일 때, 이러한 시행을 독립시행이라고 한다.

일반적으로 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 X는 $0, 1, 2, \cdots, n$의 값을 가지는 이산확률변수이고, 그 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}\ (q=1-p,\ x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

이다.

이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 **이항분포**라 하고, 기호로

$$\mathbf{B}(n, p)$$

와 같이 나타낸다.

이때 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따른다고 한다.

● 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$에서 B는 Binomial distribution(이항분포)의 첫 글자이다.

이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	r	$\cdots$	n	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_n\mathrm{C}_0\, q^n$	${}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2\, p^2q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n\, p^n$	1

이 표에서 각 확률은 이항정리에 의하여 $(p+q)^n$을 전개한 식

$$(p+q)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, q^n + {}_n\mathrm{C}_1\, pq^{n-1} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, p^n$$

의 우변의 각 항과 같다.

이때 $p+q=1$이므로 $\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, p^rq^{n-r}=1$임을 알 수 있다.

문제 1 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수를 구하고, 확률분포를 표로 나타내어라.

예제 01 어느 볼링 선수는 공을 한 번 굴렸을 때, 스트라이크를 칠 확률이 0.8이라고 한다. 이 선수가 공을 3번 굴렸을 때, 스트라이크를 친 횟수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 따르는 분포를 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$의 형태로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 스트라이크를 친 횟수가 1 이하일 확률을 구하여라.

풀이 (1) 공을 한 번 굴렸을 때, 스트라이크를 칠 확률은 $0.8=\frac{4}{5}$이고, 매회 시행은 독립시행이다. 따라서 3번의 독립시행에서 스트라이크를 친 횟수를 확률변수 X라고 하였으므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

(2) X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

(3) 스트라이크를 친 횟수가 1 이하인 것은 $X\le1$인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(x=1)$$
$$={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{5}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{13}{125}$$

답 (1) $\mathrm{B}\left(3, \frac{4}{5}\right)$ (2) $\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ (3) $\frac{13}{125}$

문제 2 파란 공 4개, 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 것을 3번 시행하였다. 빨간 공이 나온 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X가 따르는 이항분포를 $\mathrm{B}(n,\ p)$의 형태로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 확률질량함수를 구하여라.

(3) 빨간 공이 2번 이상 나올 확률을 구하여라.

이항분포의 평균과 표준편차는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내고, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하여 보자.

2. 확률변수 X가 따르는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$에 대하여 np의 값을 구하여 보자.

3. **1**, **2**에서 구한 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 np의 값을 비교하여 보자.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여 보자.

예를 들어 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

따라서 X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3$$
$$=3p(p+q)^2=3p$$

$q=1-p$이므로 $p+q=1$

$$\mathrm{V}(X)=(0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3)-(3p)^2$$
$$=3p(p+q)(3p+q)-(3p)^2$$
$$=3pq$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3pq}$$

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같음이 알려져 있다.

이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $(q=1-p)$

(1) 평균 $\mathrm{E}(X)=np$

(2) 분산 $\mathrm{V}(X)=npq$

(3) 표준편차 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

보기 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{2}{5}\right)$를 따를 때,

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{2}{5}=12$, $\mathrm{V}(X)=30\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{5}$, $\sigma(X)=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

문제 3 확률변수 X가 다음 이항분포를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(45, \frac{1}{3}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(200, \frac{2}{5}\right)$

예제 02 두 개의 동전을 300번 던져서 둘 다 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

풀이 두 개의 동전을 한 번 던져서 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 매회 시행은 독립시행이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(300, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=300\times\frac{1}{4}=75,\ \mathrm{V}(X)=300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{225}{4}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

답 $\mathrm{E}(X)=75$, $\mathrm{V}(X)=\frac{225}{4}$, $\sigma(X)=\frac{15}{2}$

문제 4 새로 개발된 약으로 임상 시험을 한 결과 완치율이 90 %라고 한다. 이 약으로 100명의 환자를 치료해서 완치되는 환자의 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

큰 수의 법칙이란 무엇인가?

탐구 활동

한 개의 주사위를 n번 던져서 1이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 주사위를 10번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{10}$의 값을 구하여 보자.
2. 주사위를 30번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{30}$의 값을 구하여 보자.
3. 주사위를 50번 던졌을 때, 상대도수 $\frac{X}{50}$의 값을 구하여 보자.
4. n이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 어떤 수에 가까워지는지 추측하여 보자.

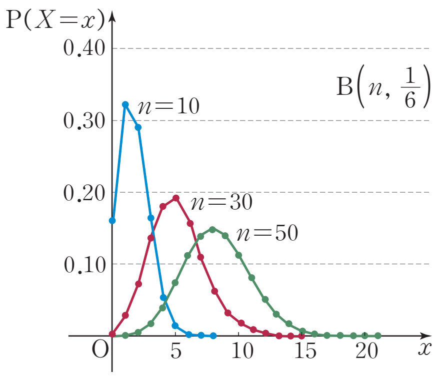
한 개의 주사위를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따른다는 사실을 이용하여 n이 커짐에 따라 1의 눈이 나오는 횟수의 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$ 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

이산확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}$$

$$(x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

이므로 n의 값이 10, 30, 50일 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같고 그래프로 나타내면 다음과 같다.



x \ n	10	30	50
0	0.1615	0.0042	0.0001
1	0.3230	0.0253	0.0011
2	0.2907	0.0733	0.0054
3	0.1550	0.1368	0.0172
4	0.0543	0.1847	0.0405
5	0.0130	0.1921	0.0745
6	0.0022	0.1601	0.1118
7	0.0002	0.1098	0.1405
8	0.0000	0.0631	0.1510
9	⋮	0.0309	0.1410
10		0.0130	0.1156
11		0.0047	0.0841
12		0.0015	0.0546
13		0.0004	0.0319
14		0.0001	0.0169
15		0.0000	0.0081
16		⋮	0.0035
17			0.0014
18			0.0005
19			0.0002
20			0.0001
21			0.0000
22			⋮

이제 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표를 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때, 주사위의 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{X}{n}$와 수학적 확률 $\frac{1}{6}$의 차가 0.1보다 작을 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$을 각각 구하여 보자.

$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1$에서 $-\frac{1}{10}<\frac{X}{n}-\frac{1}{6}<\frac{1}{10}$ $\frac{n}{15}<X<\frac{4n}{15}$

(i) $n=10$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}<X<\frac{8}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=0.6137$$

(ii) $n=30$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{30}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}(2<X<8)$$
$$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)=0.7835$$

(iii) $n=50$일 때,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)=\mathrm{P}\left(\frac{10}{3}<X<\frac{40}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\cdots+\mathrm{P}(X=13)=0.9455$$

이로부터 주사위의 1의 눈이 나오는 상대도수와 수학적 확률과의 차가 0.1보다 작을 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.1\right)$은 n이 커질수록 1에 가까워짐을 알 수 있다.

이와 같은 결과는 그 차이를 0.1에서 0.01, 0.001, …과 같은 임의의 양수로 바꾸어도 마찬가지로 성립한다.

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 상대도수 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워짐이 알려져 있는데 이것을 **큰 수의 법칙**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면 상대도수 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워진다.

문제 5 117쪽의 확률분포표를 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.05\right)$를 각각 구하여 보고 n의 값이 커짐에 따라 그 값이 1에 가까워짐을 확인하여라.

03 정규분포

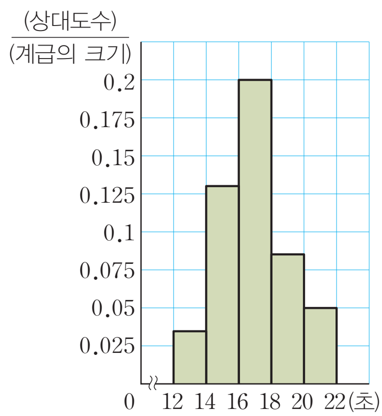
● 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

연속확률변수란 무엇인가?

탐구 활동

다음은 어느 학교 학생 100명의 달리기 기록을 조사하여 나타낸 표와, 이 표를 가로축은 기록, 세로축은 $\frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$로 하여 그린 히스토그램이다. 물음에 답하여 보자.

기록(초)	상대도수	$\frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})}$
12 이상 ~ 14 미만	0.07	0.035
14 ~ 16	0.26	0.13
16 ~ 18	0.4	0.2
18 ~ 20	0.17	0.085
20 ~ 22	0.1	0.05
합계	1	



1. 임의로 1명의 학생을 택하였을 때, 이 학생의 달리기 기록이 16초 이상 18초 미만일 확률을 표를 이용하여 구하여 보자.

2. 히스토그램에서 달리기 기록이 16초 이상 18초 미만인 계급에 해당하는 색칠한 직사각형의 넓이를 구한 후 **1**의 결과와 비교하여 보자.

탐구 활동에서 학생의 달리기 기록을 X초라고 하면 X는 $12 \leq X < 22$를 만족시키는 모든 실수의 값을 가지는 확률변수이다. 이와 같이 어떤 연속하는 범위 안에서 모든 실수의 값을 가지는 확률변수를 **연속확률변수**라고 한다.

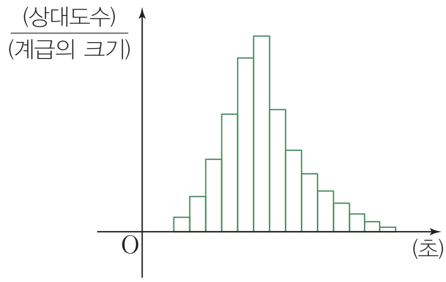
히스토그램의 각 직사각형의 넓이는

$$\begin{aligned}(\text{직사각형의 넓이}) &= (\text{계급의 크기}) \times \frac{(\text{상대도수})}{(\text{계급의 크기})} \\ &= (\text{상대도수})\end{aligned}$$

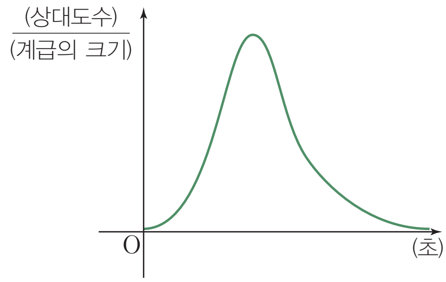
이므로 각 계급의 상대도수를 나타내고, 상대도수의 합이 1이므로 직사각형들의 넓이의 합은 항상 1이 된다.

이때 조사 대상의 수를 늘리고 계급의 크기를 작게 하여 히스토그램을 그리면 〈그림 1〉을 얻을 수 있다.

또 조사 대상의 수를 한없이 늘리고 계급의 크기를 한없이 작게 하면 히스토그램은 〈그림 2〉와 같이 매끄러운 곡선이 될 것이다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

이때 이 곡선은 항상 가로축 위에 있고, 이 곡선과 가로축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이 된다.

일반적으로 $\alpha \le x \le \beta$에서 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여 함수 $f(x)$가 존재하는데 이 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 **확률밀도함수**라고 한다.

일반적으로 확률밀도함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

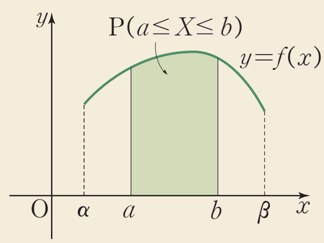
확률밀도함수의 성질

연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$이면

(1) $f(x) \ge 0$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(3) 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$ $(\alpha \le a \le b \le \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



참고 $\alpha \le x \le \beta$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$에 대하여 미적분 I 의 다항함수의 적분법에서 배우는 정적분을 이용하면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

(1) 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$ $(\alpha \le a \le b \le \beta)$는

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

(2) 임의의 상수 c에 대하여 $\int_c^c f(x)dx = 0$이므로

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \mathrm{P}(a < X \le b) = \mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X < b)$$

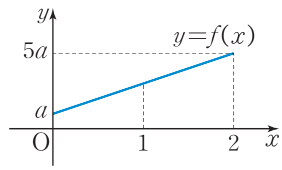
예제 01 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=2ax+a\ (0\le x\le 2)$$

일 때, 다음을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

(1) a의 값　　　　(2) 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

풀이 (1) 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로 $\frac{1}{2}\times(a+5a)\times 2=1$



따라서 $a=\frac{1}{6}$이다.

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$에서 $f(1)=\frac{1}{2}$

확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$

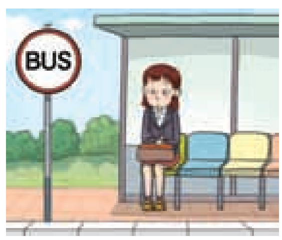
문제 1 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=ax+b\ (0\le x\le 3)$$

이고 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{4}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활

문제 2 소은이는 8시에 버스 정류장에 도착하여 8시와 8시 20분 사이의 임의의 시각에 도착하는 버스를 기다리고 있다. 소은이가 버스를 기다리는 시간이 5분 이상 15분 이하일 확률을 구하여라.



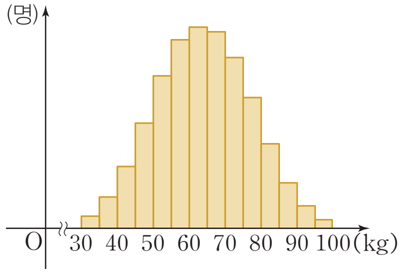
사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

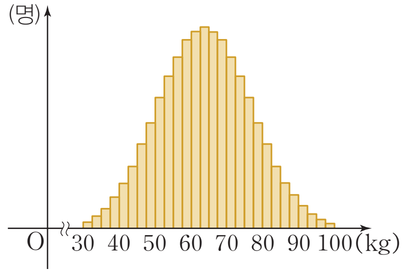
연속확률변수 X가 1 이상 5 이하의 모든 실수 값을 가질 때, 확률 $\mathrm{P}(X=2)$를 구하여 보자.

정규분포란 무엇인가?

탐구 활동 다음은 어느 학교 학생 1000명의 몸무게를 조사하여 만든 히스토그램으로 〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 계급의 크기는 각각 5 kg, 2.5 kg이다. 물음에 답하여 보자.



〈그림 1〉

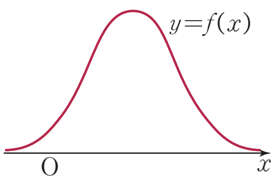


〈그림 2〉

1. 〈그림 1〉과 〈그림 2〉의 히스토그램을 도수분포다각형으로 그려 보자.

2. 계급의 크기를 0에 가깝게 하였을 때, 도수분포다각형은 어떤 모양이 될지 말하여 보자.

자연 현상이나 사회 현상 중에는 확률밀도함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 어떤 값을 중심으로 대칭적으로 분포하며 중심에서 멀어질수록 도수가 작아지는 종 모양의 곡선에 가깝게 나타나는 경우가 많이 있다.



연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X의 확률분포를 **정규분포**라고 한다. 여기서 m과 σ $(\sigma>0)$는 각각 연속확률변수 X의 평균과 표준편차를 나타내는 상수이고, e는 그 값이 $2.71828\cdots$인 무리수이다.

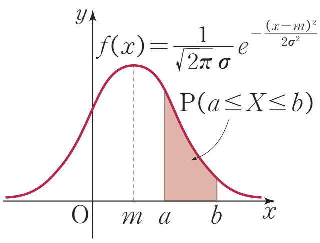
이와 같이 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 기호로

$$\mathbf{N(m,\ \sigma^2)}$$

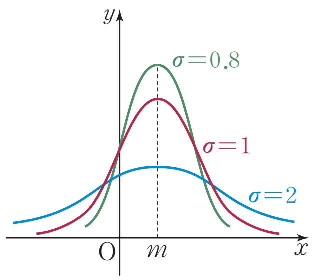
과 같이 나타낸다. 이때 연속확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$에서 N은 Normal distribution(정규분포)의 첫 글자이다.

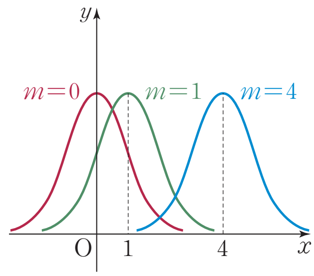
연속확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$는 $a\le x\le b$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이이다.



한편 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 m과 σ의 값에 따라 다음과 같이 그 모양이 정해진다.



[m의 값이 일정할 때]



[σ의 값이 일정할 때]

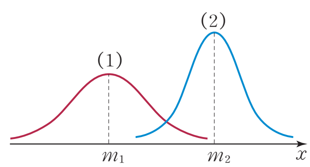
일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같은 성질을 가진다.

정규분포의 확률밀도함수의 그래프를 정규분포곡선이라 하고, 정규분포곡선을 그릴 때에는 y축을 생략하고 그리기도 한다.

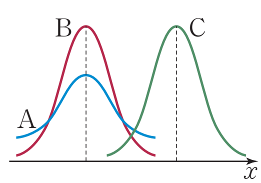
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$의 확률밀도함수의 그래프의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
(3) $x=m$일 때, 최댓값을 가진다.
(4) m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커질수록 곡선이 낮아지면서 양옆으로 퍼지고, σ의 값이 작아질수록 곡선이 높아지면서 좁아진다.
(5) σ의 값이 일정할 때, m의 값이 달라지면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.

보기 오른쪽 그림에서 (1)은 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ {\sigma_1}^2)$의 확률밀도함수의 그래프이고 (2)는 정규분포 $\mathrm{N}(m_2,\ {\sigma_2}^2)$의 확률밀도함수의 그래프일 때, $m_1<m_2$이고 $\sigma_1>\sigma_2$이다.



문제 3 오른쪽 그림에서 곡선 A, B, C는 각각 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}의 확률밀도함수의 그래프이다. 곡선 A, B의 대칭축은 서로 같고, 곡선 C는 곡선 B를 평행이동한 것이다. X_{A}, X_{B}, X_{C}의 평균을 각각 m_{A}, m_{B}, m_{C}라 하고 표준편차를 각각 σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}라고 할 때, 다음의 대소를 비교하여라.



(1) m_{A}, m_{B}, m_{C} (2) σ_{A}, σ_{B}, σ_{C}

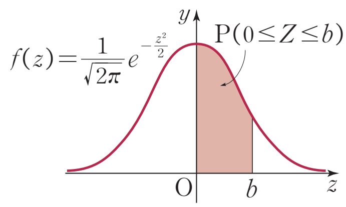
표준정규분포란 무엇인가?

평균이 0이고 분산이 1인 정규분포를 **표준정규분포**라 하고, 기호로 **N(0, 1)**과 같이 나타낸다.

● 표준정규분포를 따르는 확률변수는 흔히 Z로 표현한다.

확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, Z의 확률밀도함수는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$



이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

임의의 양수 b에 대하여 Z가 0 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le b)$는 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 이 책의 부록에 실려 있는 표준정규분포표에서 찾을 수 있다.

P. 181 표준정규분포표

이를테면 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$$

이고

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$$

임을 알 수 있다.

z	0	1	5	6	7
0.0	.0000	.0040	.0199	.0239	.0279
0.1	.0398	.0438	.0596	.0636	.0675
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	.4713	.4719	.4744	.4750	.4756
2.0	.4772	.4778	.4798	.4803	.4808

참고 표준정규분포 N(0, 1)을 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수 $y=f(z)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

(1) $\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$

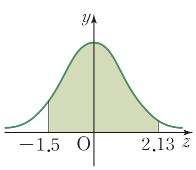
(2) $\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le a)$ (단, $a\ge 0$)

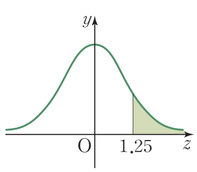
(3) $\mathrm{P}(-a\le Z\le a)=2\mathrm{P}(0\le Z\le a)$ (단, $a\ge 0$)

예제 02

확률변수 Z가 표준정규분포 N(0, 1)을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 2.13)$　　　　(2) $\mathrm{P}(Z\ge 1.25)$





풀이 (1) $\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 2.13)=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.13)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.13)$

$=0.4332+0.4834=0.9166$

(2) $\mathrm{P}(Z\ge 1.25)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)$

$=0.5-0.3944=0.1056$

답 (1) 0.9166　(2) 0.1056

문제 4 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(-1.83 \le Z)$

(2) $\mathrm{P}(1.65 \le Z \le 2)$

(3) $\mathrm{P}(Z \le 0.95)$

(4) $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)$

확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 두 상수 a, b $(a \ne 0)$에 대하여 확률변수 $aX+b$도 정규분포를 따른다는 것이 알려져 있다.

따라서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균과 분산은

$$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{\mathrm{E}(X)-m}{\sigma}=\frac{m-m}{\sigma}=0$$

$$\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{\mathrm{V}(X)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

이므로 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 **표준화**한다고 한다.

한편 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X가 a 이상 b 이하의 값을 가질 확률은

$$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le \frac{X-m}{\sigma} \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

이므로 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때,

(1) 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(2) $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \le Z \le \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

예제 03

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(14 \le X \le 31)$을 구하여라.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-20}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(14 \le X \le 31) &= \mathrm{P}\left(\frac{14-20}{5} \le \frac{X-20}{5} \le \frac{31-20}{5}\right)\\ &= \mathrm{P}(-1.2 \le Z \le 2.2)\\ &= \mathrm{P}(-1.2 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.2)\\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.2)\\ &= 0.3849+0.4861\\ &= 0.8710\end{aligned}$$

답 0.8710

문제 5

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35, 3^2)$을 따를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(32 \le X \le 38)$ (2) $\mathrm{P}(26 \le X \le 29)$ (3) $\mathrm{P}(X > 41)$

예제 04

A 회사에서 생산한 두루마리 화장지의 길이는 평균이 50 m, 표준편차가 40 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 두루마리 화장지 중에서 한 개를 임의로 선택하였을 때, 그 길이가 51 m 이상일 확률을 구하여라.

풀이 두루마리 화장지의 길이를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 0.4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\dfrac{X-50}{0.4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \ge 51) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-50}{0.4} \ge \frac{51-50}{0.4}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 2.5)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)\\ &= 0.5-0.4938\\ &= 0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

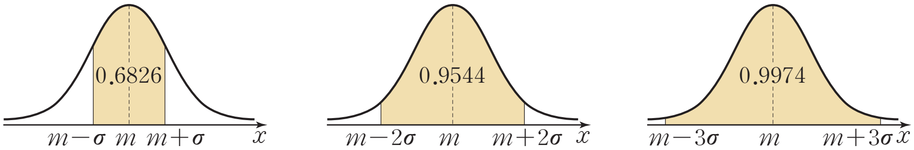
실생활

문제 6 어느 편의점에서 판매하는 김밥 1개의 무게는 평균이 200 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 편의점에서 판매하는 김밥 중 무게가 190 g 미만인 것은 전체의 몇 %인지 구하여라.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma)=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)=0.6826$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)=\mathrm{P}(-2 \le Z \le 2)=0.9544$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma)=\mathrm{P}(-3 \le Z \le 3)=0.9974$$

즉, X와 평균의 차가 σ, 2σ, 3σ 이내에 있을 확률은 각각 0.6826, 0.9544, 0.9974이다.



보기 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(m-1.96\sigma \le X \le m+1.96\sigma)&=\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)\\&=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)\\&=2\times 0.4750=0.95\end{aligned}$$

문제 7 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때,

$$\mathrm{P}(m-k\sigma \le X \le m+k\sigma)=0.97$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 표는 진수의 국어, 수학, 영어 과목의 점수와 반 전체 학생 35명의 각 과목 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 반 전체 학생의 각 과목의 점수는 정규분포를 따른다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

과목	국어	수학	영어
진수	85	80	82
반 전체 평균	82	70	79
반 전체 표준편차	4	8	6

(1) 진수의 각 과목의 점수를 표준화하여 보자.

(2) 진수는 각 과목에서 대략 몇 등을 차지하였는지 구하여 보자.

(3) 진수가 가장 높은 점수를 얻은 국어 과목의 등수를 다른 과목의 등수와 비교하여 보고, 정규분포를 표준정규분포로 표준화하는 이유를 말하여 보자.

이항분포와 정규분포는 어떤 관계가 있는가?

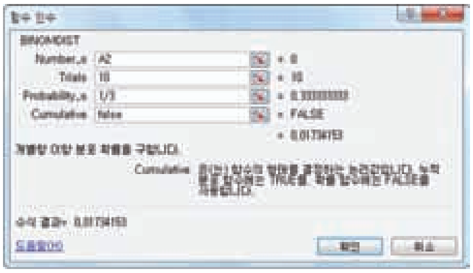
탐구 활동 한 개의 주사위를 n번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다. 컴퓨터 프로그램을 이용하여 n의 값이 10, 30, 50일 때 X의 확률분포를 구하고, n의 값이 커짐에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 말하여 보자.

❶ A1 셀부터 D1 셀까지 각각 x, $n=10$, $n=30$, $n=50$을 입력하고, A2 셀부터 A52 셀까지 0, 1, 2, $\cdots$, 50을 차례로 입력한다.

❷ B2 셀을 선택하고 '수식' 메뉴에서 '함수 삽입'을 선택한다.

❸ '함수 마법사' 창이 나타나면 범주 선택에서 '통계'를, 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택하고 확인을 누른다.

❹ '함수 인수' 창이 나타나면 다음과 같이 인수를 입력하고 확인을 누른다.

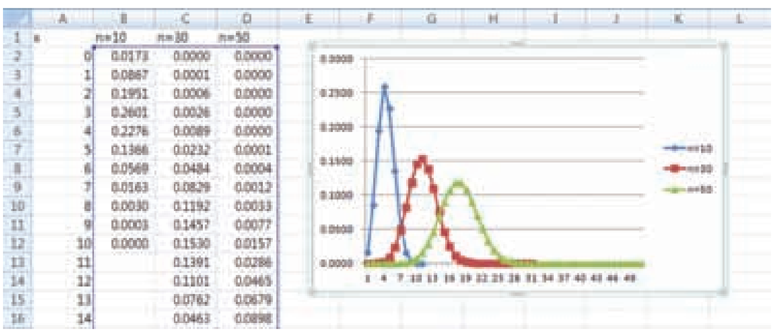


❺ B2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=10$일 때의 확률분포를 구한다.

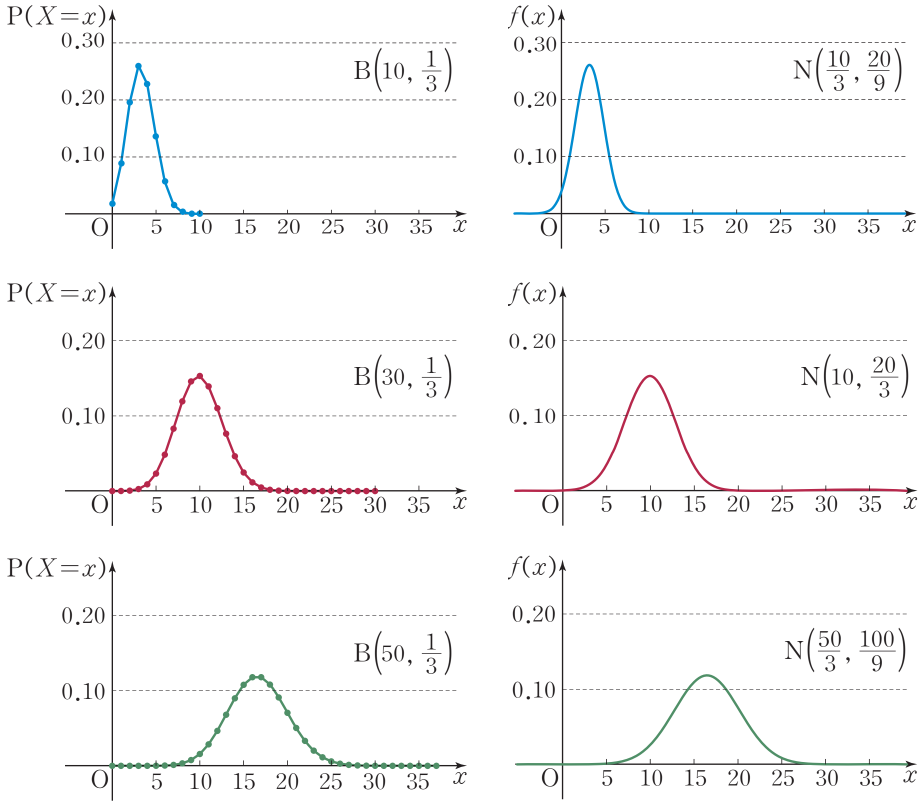
❻ C2 셀을 선택하고 Trials 인수를 30으로 변경하여 ❷~❹의 과정을 수행한다. 그리고 C2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=30$일 때의 확률분포를 구한다.

❼ D2 셀을 선택하고 Trials 인수를 50으로 변경하여 ❷~❹의 과정을 수행한다. 그리고 D2 셀의 채우기 핸들을 이용하여 $n=50$일 때의 확률분포를 구한다.

❽ B2 셀부터 D52 셀까지 선택하고 '삽입' 메뉴의 '차트' 항목 중에서 '꺾은선형'의 '표식이 있는 꺾은선형'을 선택하면 아래와 같이 세 분포의 그래프가 나타난다.

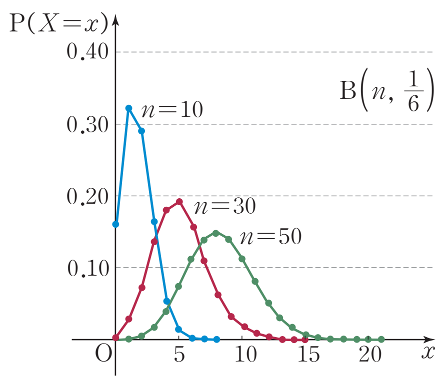


$n=10$, 30, 50일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같이 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{n}{3}, \frac{2n}{9}\right)$의 그래프에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.



일반적으로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 X는 평균이 np, 분산이 npq $(q=1-p)$인 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다는 사실이 알려져 있다.

n의 값이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np \geq 5$이고 $nq \geq 5$일 때를 뜻한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

이항분포와 정규분포의 관계

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. $(q=1-p)$

예제 **05** 한 개의 동전을 100번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 56번 이상 60번 이하일 확률을 구하여라.

풀이 한 개의 동전을 100번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$$

$n=100$, $p=\frac{1}{2}$에서 $np=50\geq5$, $nq=50\geq5$ 이므로 n의 값은 충분히 크다고 할 수 있다.

이때 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$에 가까워진다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(56\leq X\leq 60)&=\mathrm{P}\left(\frac{56-50}{5}\leq\frac{X-50}{5}\leq\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(1.2\leq Z\leq 2)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.2)\\&=0.4772-0.3849=0.0923\end{aligned}$$

답 0.0923

문제 8 어느 과수원에서 생산되는 사과 중에서 최고 등급으로 분류되는 사과의 비율이 60 %라고 한다. 이 과수원에서 생산되는 사과 600개를 대상으로 등급을 조사하였을 때, 최고 등급으로 분류되는 사과의 수가 378개 이상일 확률을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

타율이 2할 5푼인 타자란 많은 타석 중에서 안타를 친 횟수의 평균이 2할 5푼인 타자를 말한다. 따라서 이 타자가 4번째 타석에서 안타를 칠 확률은 앞선 타석과 마찬가지로 여전히 $\frac{1}{4}$이다.

그렇다면 타율이 2할 5푼인 타자가 48번의 타석에서 안타를 15번 이상 칠 확률을 구하여라.

[해답 p.176]

중단원 기초

수준별 학습

1 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 기댓값과 표준편차를 구하여라.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

01 확률변수와 확률분포
이산확률변수의 기댓값과 표준편차

2 확률변수 X가 다음 이항분포를 따를 때, X의 평균과 분산 및 표준편차를 구하여라.

(1) $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{4}\right)$

(2) $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{6}\right)$

02 이항분포
이항분포의 평균과 표준편차

3 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{2}x \ (0\le x\le 2)$$

일 때, 확률 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$을 구하여라.

03 정규분포
확률밀도함수

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(46, 5^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(X\ge 56)$을 구하여라.

03 정규분포
표준정규분포

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(20\le X\le 26)$을 구하여라.

03 정규분포
이항분포와 정규분포의 관계

[해답 p.176]

중단원 기본

수준별 학습

1 확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)=kx^2\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$일 때, 확률 $\mathrm{P}(X\geq 3)$을 구하여라.

01 확률변수와 확률분포
확률질량함수

2 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=3$일 때, $\mathrm{E}(2X^2+3)$의 값을 구하여라.

01 확률변수와 확률분포
확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

3 두 개의 동전을 동시에 10번 던져서 두 개의 동전 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균을 구하여라.

02 이항분포
이항분포의 평균과 표준편차

4 어느 고등학교 학생들의 통학 시간은 평균이 32분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생 중 한 명을 선택했을 때, 통학 시간이 40분 이상일 확률을 구하여라.

03 정규분포
표준정규분포

5 한 개의 주사위를 720번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(X\geq 125)$를 구하여라.

03 정규분포
이항분포와 정규분포의 관계

중단원 실력

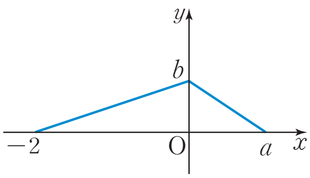
1 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, $a \ge b$이면 2점을 얻고 $a < b$이면 4점을 잃는 게임을 하려고 한다. 주사위를 던지기 전에 기본 점수는 50점이고, 두 개의 주사위 A, B를 동시에 10번 던진 후의 점수를 확률변수 X라고 할 때, X의 표준편차를 구하여라.

01 확률변수와 확률분포
확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차

2 한 개의 주사위를 5번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수가 X이면 상금으로 13^X원을 받는 게임에서 상금의 기댓값을 구하여라.

02 이항분포
이항분포의 평균과 표준편차

3 두 양수 a, b에 대하여 $-2 \le x \le a$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2} \le X \le a\right) = \frac{b}{8}$일 때, 확률 $\mathrm{P}(0 \le X \le a)$를 구하여라.



03 정규분포
확률밀도함수

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때,

$$\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = 0.6826$$
$$\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma) = 0.9544$$
$$\mathrm{P}(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma) = 0.9974$$

이다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따를 때, 위의 사실을 이용하여 확률 $\mathrm{P}(-2 \le Z \le -1) + \mathrm{P}(1 \le Z \le 3)$을 구하여라.

03 정규분포
표준정규분포

5 자유투 성공률이 80 %인 농구 선수가 100번의 자유투에서 성공한 횟수가 k번 이하일 확률이 0.1587이라고 한다. 이때 오른쪽 표준정규분포를 이용하여 실수 k의 값을 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332

03 정규분포
이항분포와 정규분포의 관계

2 통계적 추정

저수지에 살고 있는 붕어의 수는 모두 몇 마리일까?

저수지에 살고 있는 붕어의 수나 지리산에 살고 있는 노루의 수와 같이 넓은 지역에 살고 있는 동물의 수를 정확히 아는 것은 매우 힘들다. 이러한 경우 다음과 같은 방법으로 그 지역에 사는 동물의 수를 추정할 수 있다.

먼저 적당한 수의 대상 동물을 포획하고 표지를 단 다음 풀어 준다. 시간이 흐른 후 다시 적당한 수의 대상 동물을 포획하여 표지를 달고 있는 동물의 수를 조사한다. 이때 표지를 달고 있는 동물들이 무리 중에 골고루 분포되어 있다고 가정하면, 다시 잡은 동물 중 표지를 달고 있는 동물의 비율이 전체 동물 중 표지를 달고 있는 동물의 비율과 같다고 볼 수 있다.

이 방법은 조사 지역에서 연구 대상 개체군을 모두 조사할 수 없을 때 개체군의 크기를 알아내기 위해 생태학에서 흔히 사용하는 방법으로 '포획 재포획법'이라고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 148쪽

포획 재포획법으로 저수지에 살고 있는 붕어의 수를 구할 수 있을까?

01 모집단과 표본

● 모집단과 표본의 뜻을 알고, 표본평균과 모평균의 관계를 이해한다.

모집단과 표본이란 무엇인가?

탐구 활동

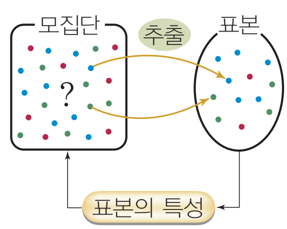
투표소에서 투표를 마치고 나오는 유권자를 상대로 어느 후보를 선택하였는지 알아보는 것을 '출구조사'라고 한다. 국회의원 선거에서 투표를 한 사람을 대상으로 출구조사를 하려고 한다. 투표를 한 사람이 모두 50000명이라고 할 때, 다음 두 가지 조사 방법의 장점과 단점을 말하여 보자.

1. 투표한 사람 전체를 대상으로 한 출구조사
2. 투표한 사람 중에서 임의로 선택한 2000명을 대상으로 한 출구조사

국회의원 선거에서 투표가 모두 종료되고 난 후에는 당선자를 정확히 가려야 하므로 투표용지를 모두 개표하여 조사한다. 이와 같이 조사 대상이 되는 자료 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 한다.

한편 출구조사와 같이 투표가 모두 종료되기 전에 투표를 한 사람 중에 일부를 뽑아 조사하여 당선자를 예측하기도 하는데, 이와 같이 조사하고자 하는 자료로부터 일부 대상을 뽑아 그 성질을 조사하고, 그 결과로부터 자료 전체의 성질을 추측하는 것을 **표본조사**라고 한다.

통계 조사에서 조사 대상이 되는 집단 전체를 **모집단**이라 하고, 모집단에서 뽑은 자료 일부를 **표본**이라고 한다. 또 모집단과 표본에 포함되어 있는 자료의 개수를 각각 모집단의 크기, 표본의 크기라고 한다. 그리고 모집단에서 표본을 뽑는 것을 추출이라고 한다.



보기 어느 고등학교에서 확률과 통계 2회고사 점수의 평균을 알기 위하여 모든 학생의 점수를 조사하는 것은 전수조사이고, 임의로 50명의 학생을 뽑아 조사하는 것은 표본조사이다. 이때 모집단은 모든 학생의 점수이고, 표본은 임의로 뽑은 50명의 학생의 점수이다.

문제 1 어느 조사 기관에서 우리나라 고등학생의 수면 시간을 알아보기 위하여 임의로 3000명을 뽑아 조사하였다. 이 조사가 어떤 조사 방법인지 말하고, 모집단과 표본을 말하여라.

표본조사의 목적은 모집단 전체를 조사하지 않고 그 일부인 표본을 조사하여 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 특성을 추측하는 데 있다. 따라서 모집단의 특성을 잘 나타내도록 모집단의 어느 한 부분에 편중되지 않게 표본을 추출하여야 한다.

모집단에서 표본을 추출하는 여러 가지 방법 중에서 모집단의 각 원소를 같은 확률로 추출하는 것을 **임의추출**이라 하고, 임의추출된 표본을 임의표본이라고 한다.

모집단에서 표본을 임의추출하는 방법으로는 제비뽑기, 난수 주사위 사용하기, 난수표 사용하기 등이 있다. 그러나 공학 도구가 발전된 요즈음에는 계산기, 컴퓨터 프로그램을 많이 사용한다.

특별한 언급이 없으면 표본은 임의표본을 뜻한다.

난수 주사위란 각 면에 0에서 9까지의 숫자를 2번씩 써넣은 정이십면체 모양의 주사위이다.

보기 어느 공연장에 입장한 300명의 관객 중에서 10명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의추출할 수 있다.

① A1 셀에 '=RANDBETWEEN(1, 300)'을 입력한다.

② A1 셀에서 채우기 핸들을 이용하여 A10 셀까지 드래그하면 10개의 난수를 얻는다.

	A	B	C
1	=RANDBETWEEN(1,300)		
2	196		
3	13		
4	30		
5	300		
6	63		
7	229		
8	50		
9	249		
10	121		
11			

'=RANDBETWEEN(a, b)'는 a와 b 사이의 난수를 반환하는 함수이다.

문제 2 자신이 속한 반 학생들 중에서 5명을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 임의추출하여라.

한편 모집단에서 표본을 추출할 때, 한 개의 자료를 추출한 후 다시 되돌려 놓고 추출하는 것을 복원추출이라 하고 다시 되돌려 놓지 않고 계속 추출하는 것을 비복원추출이라고 한다.

모집단의 크기가 충분히 큰 경우에는 비복원추출도 복원추출로 볼 수 있다.

보기 1부터 10까지의 자연수가 각각 적힌 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 표본의 크기가 3인 표본을 임의추출하는 경우의 수는

(1) 복원추출일 때: ${}_{10}\Pi_3=10^3=1000$

(2) 비복원추출일 때: ${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$

문제 3 어느 학급의 학생 30명 중에서 2명을 뽑을 때, 다음과 같은 방법으로 임의추출하는 경우의 수를 구하여라.

(1) 복원추출 (2) 비복원추출

모평균과 표본평균은 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

다음 표는 어느 반 학생 20명의 수학 점수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
점수	65	87	57	92	36	42	78	82	70	45
번호	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
점수	26	68	54	70	88	76	96	32	30	60

1. 학생 20명의 수학 점수의 평균을 구하여 보자.

2. 5명, 10명을 임의추출한 다음 두 경우의 수학 점수의 평균을 각각 구하여 보자.

3. **1**, **2**에서 구한 수학 점수의 평균을 비교하여 보자.

어떤 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라 하고, 각각 기호로 m, σ^2, σ와 같이 나타낸다.

한편 어떤 모집단에서 크기가 n인 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 임의추출하였을 때, 이 표본의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라 하고, 각각 기호로 $\overline{X}$, S^2, S와 같이 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

표본분산과 모분산의 차이를 줄이기 위하여 편차의 제곱의 합을 $n-1$로 나눈다.

$$S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$$
$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$
$$S=\sqrt{S^2}$$

탐구 활동에서 임의추출한 5명의 점수가 57, 92, 78, 68, 30이라고 하면 표본평균은 65이고 표본분산은 549, 표본표준편차는 $3\sqrt{61}$이다.

모집단은 변하지 않으므로 모평균도 변하지 않지만 표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 다른 값을 가지므로 확률변수이다. 따라서 확률변수 $\overline{X}$의 확률분포를 이용하면 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구할 수 있다.

모집단은 이 세 개의 공이 된다.

예를 들어 1, 3, 5의 숫자가 각각 적힌 세 개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의추출할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라고 하자. 이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서 모평균, 모분산, 모표준편차는 각각

$$m=\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=3$$

$$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=(1-3)^2\times\frac{1}{3}+(3-3)^2\times\frac{1}{3}+(5-3)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\sigma=\sigma(X)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이다.

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 공에 적힌 숫자를 각각 X_1, X_2라고 하면 표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$는 다음 표에서 알 수 있는 바와 같이 추출된 표본에 따라 값이 변하는 확률변수이다.

이때 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

따라서 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는

$$\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{3}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{1}{9}=3$$

$$\mathrm{V}(\overline{X})=(1-3)^2\times\frac{1}{9}+(2-3)^2\times\frac{2}{9}+(3-3)^2\times\frac{3}{9}$$
$$+(4-3)^2\times\frac{2}{9}+(5-3)^2\times\frac{1}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

이 값을 모평균, 모분산, 모표준편차와 비교하면

$$\mathrm{E}(\overline{X})=3=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

가 성립한다.

보기 모평균이 120이고 모표준편차가 5인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$$\mathrm{E}(\overline{X})=12,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{25}{9},\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

이다.

문제 4 모평균이 150이고 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

한편 모집단의 평균이 m이고 분산이 σ^2인 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 평균이 m이고 분산이 $\frac{\sigma^2}{n}$인 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름이 알려져 있다.

일반적으로 표본평균 $\overline{X}$의 분포에 대하여 다음이 성립한다.

표본평균의 분포

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, $\overline{X}$는 표본의 크기 n의 값에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

n의 값이 30 이상이면 충분히 큰 표본으로 생각한다.

참고 표본평균 $\overline{X}$의 분포가 정규분포를 따른다는 것을 확인할 수 있는 웹사이트
http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html

예제 01

어느 지역의 가구 당 통신비는 평균이 15만 원, 표준편차가 4만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 임의추출한 100가구의 통신비의 평균이 16만 원 이상일 확률을 구하여라.

풀이 모집단의 통신비는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따르므로 이 지역에서 임의추출한 100가구의 통신비의 평균을 $\overline{X}$라고 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $\overline{X}$가 16만 원 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 16)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{16-15}{\frac{2}{5}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 0.0062

문제 5 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따르는 어떤 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 확률 $\mathrm{P}(116\leq\overline{X}\leq 125)$를 구하여라.

실생활

문제 6 어느 농가에서 생산하는 곶감의 무게는 평균이 58 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서는 곶감 25개를 한 상자로 만들어 판매하는데 곶감 상자 안에 들어 있는 곶감 전체의 무게가 1.5 kg 이상이면 최상품으로 판매한다고 한다. 이 농가에서 판매하는 곶감 상자 중에서 최상품의 비율을 구하여라.

02 모평균의 추정

● 모평균을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

모평균은 어떻게 추정하는가?

생각 열기

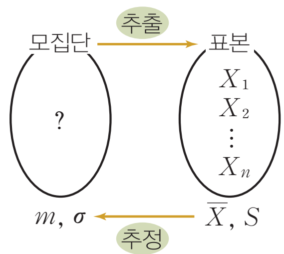
탐구 활동

우리나라 전체 고등학교 2학년 여학생의 평균 키를 알아보기 위하여 고등학교 2학년 여학생 300명의 키를 조사한 결과 표본평균은 160.8 cm이고 표본표준편차는 2 cm이었다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 우리나라 전체 고등학교 2학년 여학생의 평균 키는 얼마라고 추측할 수 있는지 말하여 보자.

2. **1**에서 추측한 값이 모평균과 같다고 할 수 있는지 말하여 보자.

탐구 활동에서와 같이 모집단의 평균, 표준편차와 같은 모집단의 특성을 알지 못할 때, 모집단에서 추출한 표본으로부터 얻은 정보를 이용하여 모집단의 특성을 나타내는 값을 확률적으로 추측하는 것을 **추정**이라고 한다.

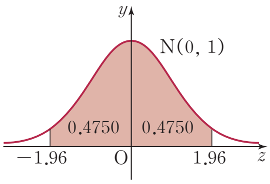


이제 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법에 대하여 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 임의추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로 $\overline{X}$를 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.



이때 표준정규분포표에서

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

이므로

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right)$$
$$= P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
$$= 0.95$$

이다.

따라서 모평균 m이

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

에 포함될 확률은 95 %이고, 이 범위를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %의 **신뢰구간**이라고 한다.

같은 방법으로 표준정규분포표에서

$$P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$$

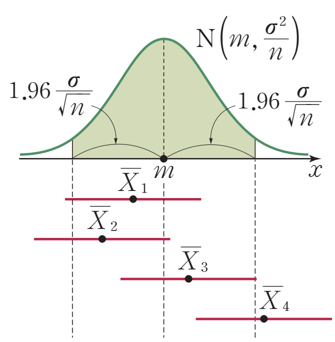
이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{X} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

임을 알 수 있다.

표본평균 $\overline{X}$는 모집단으로부터 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지는 확률변수이므로 이에 따라 신뢰구간도 달라진다.

예를 들어 오른쪽 그림에서 표본평균을 $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$으로 계산한 신뢰구간은 모평균 m을 포함하지만 $\overline{X}_4$로 계산한 신뢰구간은 모평균 m을 포함하지 않는다.



즉, ‘모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간’의 뜻은 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하여 모평균 m에 대한 신뢰구간을 만들 때, 이들 중에서 약 95 %는 모평균 m을 포함한다는 의미이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

모평균 m의 신뢰구간

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰구간은

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모표준편차 σ의 값을 알 수 없는 경우가 보통이므로 표본의 크기 n이 클 때($n\ge30$)에는 σ 대신 표본표준편차 S를 사용한다.

예제 01

어느 음식점의 돼지고기 1인분의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 음식점의 돼지고기 1인분의 무게를 25번 측정한 결과 평균이 195 g이었다고 할 때, 돼지고기 1인분의 평균 무게의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 $n=25$, $\overline{X}=195$, $\sigma=10$이므로 평균 무게 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$195-1.96\frac{10}{\sqrt{25}} \le m \le 195+1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

따라서 $191.08 \le m \le 198.92$이다.

답 $191.08 \le m \le 198.92$

문제 1 어느 도시에서 자동차를 소유한 사람이 하루 동안 운전하는 시간은 표준편차가 30분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 자동차를 소유한 사람 중 100명을 임의추출하여 조사하였더니 하루 평균 운전하는 시간이 80분이었다고 할 때, 이 도시에서 자동차를 소유한 사람이 하루 평균 운전하는 시간의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

사고력 기르기

▶ 추론
의사소통
문제 해결

모평균 m의 신뢰구간이 $\alpha \le m \le \beta$ $(\alpha<\beta)$일 때, $\beta-\alpha$를 신뢰구간의 길이라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

(1) 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

(2) 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

(3) 표준편차가 커지면 신뢰구간의 길이는 어떻게 변하는가?

03 모비율의 추정

● 표본비율과 모비율의 관계를 이해하여 모비율을 추정하고, 그 결과를 해석할 수 있다.

모비율과 표본비율은 어떤 관계가 있는가?

생각 열기

아침 식사

질병관리본부가 전국 중 · 고등학생 8만 명을 대상으로 '청소년 건강 행태 온라인 조사'를 실시한 결과 24.4 %가 "최근 7일 동안 5일 이상 아침 식사를 하지 않았다."고 답하였다.

그런데 아침 식사를 거르는 습관은 학생의 학습 능력과 암기력에 좋지 않은 영향을 미친다. 농촌진흥청의 조사에 따르면 아침 식사를 하는 학생들이 하지 않는 학생들보다 성적이 더 좋았다고 한다.

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 우리 반 학생들 중에서 최근 7일 동안 5일 이상 아침 식사를 하지 않은 학생들의 비율을 조사하여 보자.
2. 질병 관리 본부의 조사 결과와 자신이 조사한 결과를 비교하여 보고, 전국 중 · 고등학생을 모두 조사한다면 어떤 결과가 나올지 말하여 보자.

후보자에 대한 지지율, TV 프로그램의 시청률, 제품의 불량률 등과 같이 모집단에서 어떤 사건에 대한 비율을 생각할 때, 그 비율을 **모비율**이라 하고 기호로 p와 같이 나타낸다.

p는 proportion(비율)의 첫 글자이고, $\hat{p}$은 'p-hat(피햇)'으로 읽는다.

또 모집단으로부터 임의추출한 표본에서 어떤 사건에 대한 비율을 **표본비율**이라 하고, 기호로 $\hat{p}$과 같이 나타낸다.

일반적으로 어떤 사건에 대한 표본비율은 다음과 같다.

표본비율

크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

문제 1 어느 스포츠용품 판매장을 방문한 고객 중에서 200명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 물건을 구입하였다고 할 때, 이 매장을 방문한 고객 중에서 물건을 구입한 고객의 표본비율을 구하여라.

표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수이므로 X가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$이고, 모집단에서 그 사건이 일어날 확률은 p이다. 따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로 X의 평균과 분산은 각각

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq\ (q=1-p)$$

이다. 이때 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\times np=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\times npq=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

일반적으로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)\ (q=1-p)$에 가까워지므로 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{X}{n}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 따라서 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$을 표준화한 확률변수

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

표본의 크기 n의 값이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $n\hat{p}\ge 5$이고 $n\hat{q}\ge 5$일 때를 뜻한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

표본비율 $\hat{p}$의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. 따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$(q=1-p)$

예제 01 어느 지역에 사는 사람 중에서 혈액형이 B형인 사람의 비율은 25 %라고 한다. 이 지역에 사는 사람 중에서 임의추출한 300명의 혈액형을 조사하였을 때, 혈액형이 B형인 사람의 비율이 25 % 이상 30 % 이하일 확률을 구하여라.

풀이 임의추출한 300명 중에서 혈액형이 B형인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=0.25$, $n=300$이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.25$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.25\times0.75}{300}=(0.025)^2$$

이때 $n=300$은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.25,\ (0.025)^2)$에 가까워진다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(0.25\le\hat{p}\le0.3)=\mathrm{P}\left(\frac{0.25-0.25}{0.025}\le\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}\le\frac{0.3-0.25}{0.025}\right)$$

$$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$$

답 0.4772

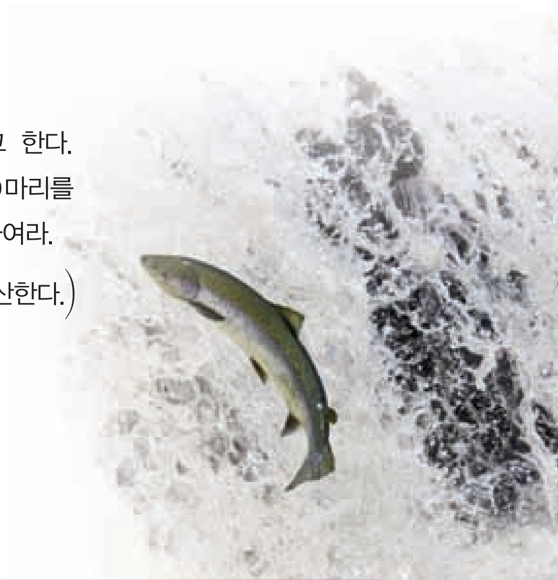
$n=300$, $\hat{p}=0.25$에서 $n\hat{p}=75\ge5$, $n\hat{q}=225\ge5$이므로 n의 값은 충분히 크다고 할 수 있다.

문제 2 어느 고등학교 학생 중에서 비만인 학생의 비율은 20 %라고 한다. 이 학교 학생 중에서 임의추출한 100명을 조사하였을 때, 비만인 학생이 16명 이하일 확률을 구하여라.

실생활

문제 3 어느 지역에서 방류하는 연어의 회귀율은 0.2 %라고 한다. 이 지역에서 방류하는 연어 중에서 임의추출한 1000마리를 조사하였을 때, 회귀 연어가 4마리 이상일 확률을 구하여라.

$\left(\text{단, } \sqrt{0.00000196}=0.0014,\ \frac{10}{7}=1.43\text{으로 계산한다.}\right)$



창의 up

예제 1을 '이항분포와 정규분포의 관계'를 이용하여 풀고, 그 결과를 비교하여 보자.

모비율은 어떻게 추정하는가?

표본평균을 이용하여 모평균을 추정한 것과 같이 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있다.

모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, n의 값이 충분히 크면 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$ $(q=1-p)$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, $\hat{p}$의 분산 $\dfrac{pq}{n}$에서 p, q 대신에 표본비율 $\hat{p}$, $\hat{q}$ $(\hat{q}=1-\hat{p})$을 사용한 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$도 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다는 사실이 알려져 있다.

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(-1.96\le\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}\le 1.96\right)\\&=\mathrm{P}\left(\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

이다.

따라서 모비율 p가

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

에 포함될 확률은 95 %이고, 이 범위를 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이라고 한다.

같은 방법으로 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(-2.58\le Z\le 2.58)=0.99$이므로 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

임을 알 수 있다.

모평균의 신뢰구간과 마찬가지로 '모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간'의 뜻은 모집단으로부터 크기가 n인 표본을 임의추출하는 일을 되풀이하여 모비율 p에 대한 신뢰구간을 만들 때, 이들 중에서 약 95 %는 모비율 p를 포함한다는 의미이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

모비율 p의 신뢰구간

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, n의 값이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 $(\hat{q}=1-\hat{p})$

(1) 신뢰도 95 %의 신뢰구간: $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %의 신뢰구간: $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

예제 02

어느 회사의 사원 중에서 임의추출한 100명을 조사한 결과 80명이 기혼자였다고 할 때, 이 회사에서 사원의 기혼자 비율의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 $n=100$, $\hat{p}=\dfrac{80}{100}=0.8$이므로 전체 사원의 기혼자 비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$$

따라서 $0.7216\le p\le0.8784$이다.

답 $0.7216\le p\le0.8784$

문제 4

다음 표는 어느 지역의 스마트폰 이용자 중에서 임의추출한 300명의 스마트폰 제조사별 인원 수를 조사하여 나타낸 것이다. 이 지역의 전체 스마트폰 이용자 중에서 제조사가 B사인 사람의 비율의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

제조사	A	B	C	기타	합계
인원 수(명)	144	75	48	33	300

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어느 저수지에서 50마리의 붕어를 포획하고 표지를 단 다음 풀어 주었다. 시간이 흐른 후 다시 100마리의 붕어를 잡았을 때, 이 중 표지를 달고 있는 붕어가 20마리였다고 한다. 표지를 달고 있는 붕어가 저수지에 골고루 분포되어 있다고 가정할 때, 이 저수지에 살고 있는 전체 붕어의 수를 신뢰도 95 %의 신뢰구간으로 추정하여 보자.

[해답 p.178]

중단원 기초

1 모평균이 60이고 모표준편차가 2인 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차를 구하여라.

01 모집단과 표본
모평균과 표본평균의 관계

2 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 20^2)$을 따르는 어떤 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 175)$를 구하여라.

01 모집단과 표본
표본평균의 분포

3 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 조사한 표본의 평균이 58일 때, 이 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

02 모평균의 추정

4 모비율이 $\frac{1}{5}$인 모집단에서 임의추출한 크기가 64인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}\left(\hat{p} \leq \frac{1}{4}\right)$을 구하여라.

03 모비율의 추정
표본비율의 분포

5 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 조사한 표본비율이 0.36일 때, 모비율 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

03 모비율의 추정

[해답 p.179]

중단원 기본

수준별 학습

1 어느 고등학교 2학년 학생들의 영어 듣기 점수는 평균이 68점, 표준편차가 8점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중에서 임의추출한 25명의 영어 듣기 점수의 평균이 72점 이상일 확률을 구하여라.

01 모집단과 표본
표본평균의 분포

2 어느 고등학교 학생들의 몸무게는 표준편차가 6 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중 81명을 임의추출하여 몸무게를 조사하였더니 평균이 60 kg이었다. 이 학교 전체 학생의 몸무게의 평균의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

02 모평균의 추정

3 어느 지역의 선거에서 A 후보의 지지율이 25 %이었다. 이 지역 주민 중에서 75명을 임의추출하여 조사하였을 때, A 후보의 지지율이 30 % 이상 35 % 이하일 확률을 구하여라.

03 모비율의 추정
표본비율의 분포

4 어느 회사에서 소비자가 어떤 제품을 선호하는 비율을 알아보기 위하여 제품을 구매한 소비자 중 100명을 임의추출하여 조사하였더니 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $0.1216 \le p \le 0.2784$이었다. 이때 표본비율 $\hat{p}$의 값을 구하여라.

03 모비율의 추정

중단원 실력

[해답 p.179]

수준별 학습

1 모평균이 20이고 모분산이 4인 모집단에서 크기가 8인 표본을 임의추출할 때, 그 표본의 합을 Y라고 하자. 확률변수 Y의 평균 $\mathrm{E}(Y)$와 분산 $\mathrm{V}(Y)$에 대하여 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하여라.

01 모집단과 표본

모평균과 표본평균의 관계

2 표준편차가 0.3인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 99 %의 신뢰도로 추정할 때, 모평균과 표본평균의 차가 0.01 이하가 되도록 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

02 모평균의 추정

3 어느 해 A 고등학교 졸업생의 대학 진학률은 70 %라고 한다. 그해 A 고등학교 졸업생 중에서 임의추출한 n명의 대학 진학률을 $\hat{p}$이라고 할 때, 확률 $\mathrm{P}(\hat{p} \le 0.8)=0.8413$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

03 모비율의 추정

표본비율의 분포

4 어느 공장에서 생산되는 전구 중에서 100개를 임의추출하여 조사하였더니 10개가 불량품이었다. 전구의 불량률 p의 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $\alpha \le p \le \beta$ $(\alpha < \beta)$일 때, $\beta-\alpha \le 0.03$이 되도록 하려면 전구를 몇 개 이상 조사하여야 하는지 구하여라.

03 모비율의 추정

수행 과제

산불 발생의 원인

산림청 자료에 의하면 2000년부터 2010년까지 우리나라의 산불 발생 총 건수는 5508건이었다. 그중 2001년이 785건으로 가장 많았고 2003년이 271건으로 가장 적었다. 오른쪽 표는 2001년 발생한 산불을 원인별로 분류하여 나타낸 것이다.

원인	건수(2001년)
입산자 실화	354
논 · 밭두렁 소각	143
쓰레기 소각	47
어린이 불장난	24
담뱃불 실화	88
성묘객 실화	45
기타	84
합계	785

〈출처: 국가통계포털〉

| 과 제 | 1 2001년에 발생한 산불의 원인 중에서 입산자 실화가 차지하는 비율을 구하고, 2000년부터 2010년까지 발생한 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화가 차지하는 비율의 신뢰도 99 %인 신뢰구간을 구하여 보자. (단, 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구한다.)

| 과 제 | 2 과제 **1**을 이용하여 2000년부터 2010년까지 발생한 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화 건수는 얼마나 되는지 추정하여 보자.

| 과 제 | 3 국가통계포털(http://www.kosis.kr) 홈페이지 검색창에서 ‘산불’을 검색한 후 ‘원인별 산불 발생 현황’을 찾아본다. 조회 기간을 2000년부터 2010년까지로 정한 후 이 기간 동안 전체 산불의 원인 중에서 입산자 실화 건수를 찾아 보고, 그것이 과제 **2**에서 추정한 범위에 포함되는지 확인하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 확률분포

확률질량함수의 성질

(1) $0 \le \mathrm{P}(X=x_i) \le 1$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i)=1$

(3) $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j)=\sum_{k=i}^{j} \mathrm{P}(X=x_k)$ (단, $i \le j$)

이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X의 확률질량함수가
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$일 때,

(1) 기댓값(평균): $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(2) 분산: $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n} (x_i-m)^2 p_i=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

(3) 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 $aX+b$ (a, b는 상수, $a \ne 0$)에 대하여

(1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

(2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

(3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $(q=1-p)$

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

정규분포

(1) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, n의 값이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np, npq)$를 따른다. $(q=1-p)$

2 통계적 추정

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

모평균이 m이고 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본평균의 분포

(1) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, $\overline{X}$는 표본의 크기 n의 값에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

(2) 모집단이 정규분포를 따르지 않아도 표본의 크기 n의 값이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

모평균의 추정

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 모평균 m의 신뢰구간은

(1) 신뢰도 95 %: $\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 신뢰도 99 %: $\overline{X}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표본비율의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n의 값이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. $(q=1-p)$

모비율의 추정

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$이라 고 할 때, n의 값이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 $(\hat{q}=1-\hat{p})$

(1) 신뢰도 95 %: $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(2) 신뢰도 99 %: $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

용어와 기호 확률변수, 이산확률변수, 확률분포, 확률질량함수, 기댓값, 이항분포, 큰 수의 법칙, 연속확률변수, 확률밀도함수, 정규분포, 표준정규분포, 표준화, 전수조사, 표본조사, 모집단, 표본, 임의추출, 모평균, 모분산, 모표준편차, 표본평균, 표본분산, 표본표준편차, 추정, 신뢰도, 신뢰구간, 모비율, 표본비율, $\mathrm{P}(X=x)$, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$, $\mathrm{B}(n, p)$, $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(0, 1)$, $\overline{X}$, S^2, S, $\hat{p}$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 1, 2, 3, 4가 각각 적혀 있는 공 4개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼내려고 한다. 꺼낸 공에 적힌 수 중에서 큰 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 분산은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{11}{18}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

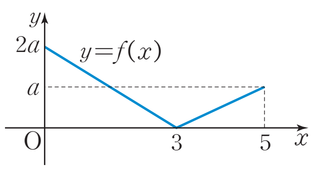
2 100원짜리 동전 두 개를 동시에 던지는 시행을 20번 반복할 때, 두 개 모두 같은 면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 Y가 $Y=(2X-1)^2$일 때, Y의 평균은?

① 371 ② 381 ③ 391
④ 401 ⑤ 411

3 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수 k에 대하여 k와 $(10-k)$가 서로소가 되는 사건을 A라고 하자. 150번 던져서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 기댓값은?

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

4 연속확률변수 X에 대하여 $0\le X\le 5$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같을 때, 확률 $\mathrm{P}(2\le X\le 5)$는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5 어느 지역의 고등학교 학생 5000명의 몸무게는 평균이 60 kg, 표준편차가 4 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 몸무게가 54 kg 이하인 학생 수는?

① 140명 ② 188명 ③ 210명
④ 256명 ⑤ 334명

6 어떤 씨앗의 발아율은 90 %라고 한다. 이 씨앗을 100개 심었을 때, 발아한 씨앗이 96개 이상일 확률은?

① 0.0228 ② 0.0446 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3085

7 1, 3, 5, 7이 각각 적혀 있는 공 4개가 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 복원추출하여 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$의 분산은?

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

8 모집단의 확률변수 X가 정규분포를 따를 때, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하자.

$$\mathrm{P}(X\le 6)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 9)$$

일 때, 모집단의 평균은?

① 7.2 ② 7.5 ③ 7.8
④ 8.1 ⑤ 8.4

9 어느 고등학교의 방과 후 수업 신청률은 60 %라고 한다. 이 고등학교 학생 중에서 150명을 임의추출하였을 때, 방과 후 수업 신청 학생 수가 96명 이상일 확률은?

① 0.0228 ② 0.0446 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3085

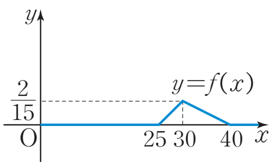
10 표준편차가 4인 모집단에서 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이가 1 이하가 되도록 하는 표본의 크기의 최솟값은?

① 196 ② 246 ③ 324
④ 400 ⑤ 484

서답형

11 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P는 주사위 한 개를 던져서 3의 배수의 눈이 나오면 3만큼, 3의 배수의 눈이 나오지 않으면 -2만큼 이동한다. 주사위를 30번 던져서 움직인 점 P의 좌표를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균을 구하여라.

12 채원이가 집에서 학교까지 가는 데 걸리는 시간을 X분이라고 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다고 한다. 학교 등교 시간이 8시까지일 때, 7시 30분에 집에서 출발한 채원이가 3일 중에서 2일 이상 지각할 확률을 구하여라.



13 어느 홍삼 음료 회사에서 만드는 음료 1병에 들어가는 홍삼의 양은 표준편차가 2 mg인 정규분포를 따른다고 한다. 생산된 음료 중에서 100병을 임의추출하여 홍삼의 양을 조사하였더니 표본평균이 30 mg이었다고 할 때, 이 회사에서 만드는 음료 1병에 들어가는 홍삼의 양의 평균의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하여라.

14 어느 지역에서 임의추출한 100가구 중에서 80가구가 한 달에 1번 이상 외식을 하였다고 할 때, 이 지역 전체 가구 중에서 한 달에 1번 이상 외식하는 가구 비율의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하여라.

|서|술|형|

15 타율이 2할인 야구 선수가 100번의 타석에서 28번 이상 안타를 칠 확률을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 어느 농장에서 생산되는 딸기 한 개의 무게는 평균이 50 g, 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서는 딸기 100개를 한 상자에 포장하는데 상자 안에 들어 있는 딸기 전체의 무게가 4.7 kg 이하이면 불량품으로 분류한다. 이 농장에서 생산된 200만 개의 딸기를 한 상자에 100개씩 포장하였을 때, 불량품으로 판정될 상자의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Engineering

수 학 ✚ 공 학

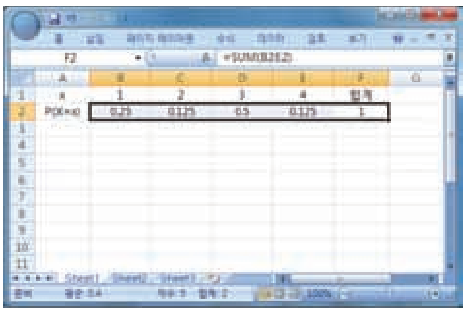
이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차 구하기

108쪽의 예제 3에서 주어진 이산확률변수의 평균, 분산 및 표준편차를 다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.

1\ 확률분포를 입력하여 보자.

① A1 셀에 'x'를 입력하고 B1, C1, D1, E1 셀에 확률변수 X가 가지는 값을 각각 입력한다. 또 F1 셀에 '합계'를 입력한다.

② A2 셀에 '$\mathrm{P}(X=x)$'를 입력하고 B2, C2, D2, E2 셀에 각각의 확률을 입력한다. 그리고 B2～E2 셀을 선택한 후 '수식' 메뉴의 합계($\sum$) 아이콘을 누르면 F2 셀에 SUM(B2:E2), 즉 B2 셀부터 E2 셀까지의 합이 계산된다.



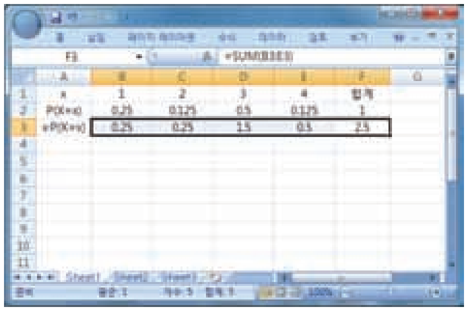
2 \ 평균을 구하여 보자.

① A3 셀에 '$x \cdot \mathrm{P}(X=x)$'를 입력한다.

② B3 셀에 '=B1*B2'를 입력하고, Enter 키를 누른다.

③ B3 셀의 채우기 핸들을 이용하여 C3, D3, E3 셀에 각각 $x \cdot \mathrm{P}(X=x)$의 값을 채워 넣는다.

④ B3~E3 셀을 선택한 후 합계(Σ) 아이콘을 누르면 F3 셀에 SUM(B3:E3), 즉 $\mathrm{E}(X)$의 값이 계산된다.



3 \ 분산과 표준편차를 구하여 보자.

① A4 셀에 '$x^2 \cdot \mathrm{P}(X=x)$'를 입력한다.

② B4 셀에 '=B1^2*B2'를 입력하고, Enter 키를 누른다.

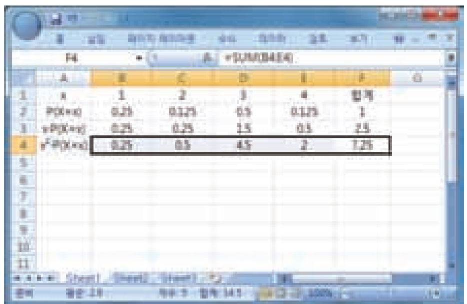
③ B4 셀의 채우기 핸들을 이용하여 C4, D4, E4 셀에 각각 $x^2 \cdot \mathrm{P}(X=x)$의 값을 채워 넣는다.

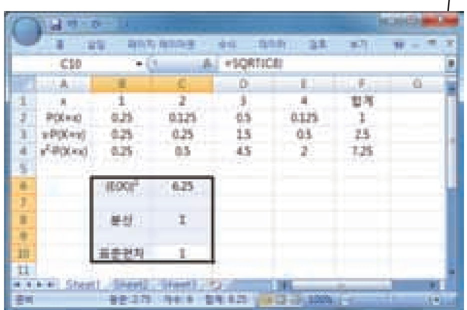
④ B4~E4 셀을 선택한 후 합계(Σ) 아이콘을 누르면 F4 셀에 SUM(B4:E4), 즉 $\mathrm{E}(X^2)$의 값이 계산된다.

⑤ B6 셀에 '$\{\mathrm{E}(X)\}^2$'을 입력하고, C6 셀에 '=F3^2'를 입력한다.

⑥ B8 셀에 '분산'을 입력하고, C8 셀에 '=F4−C6'을 입력한다. 이렇게 하면 C8 셀에 분산이 계산된다.

⑦ B10 셀에 '표준편차'를 입력하고, C10 셀에 '=SQRT(C8)'을 입력한다. 이렇게 하면 C10 셀에 표준편차가 계산된다.



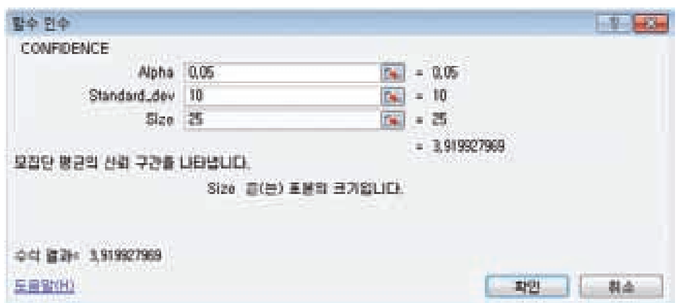


신뢰구간 구하기

143쪽의 예제 1에서 돼지고기 1인분의 평균 무게의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 다음과 같이 컴퓨터 프로그램을 이용하여 구할 수 있다.

1\ '수식' 메뉴에서 '함수 삽입'을 클릭하면 '함수 마법사' 창이 나타난다. 이때 범주 선택에서 '통계'를, 함수 선택에서 'CONFIDENCE'를 선택한 후 확인을 클릭하면 '함수 인수' 창이 나타난다.

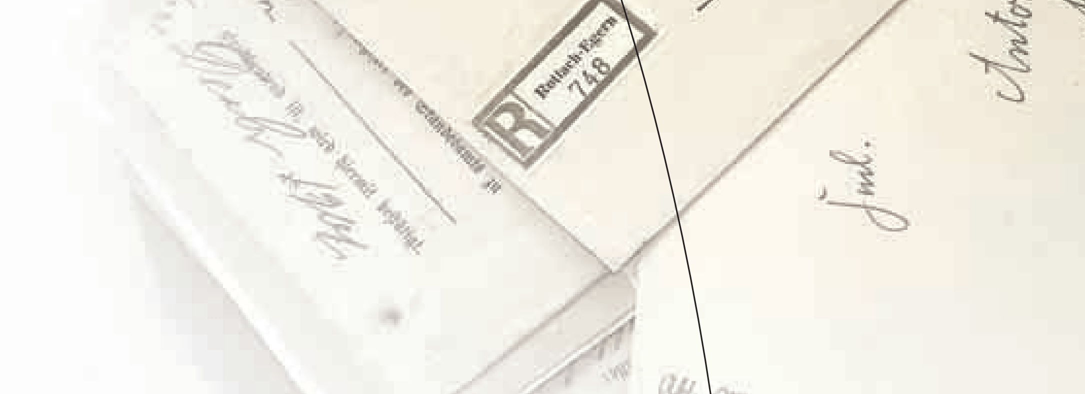
2\ Alpha에 '1−(신뢰도)', Standard_dev에 '표준편차', Size에 '표본의 크기'를 입력한다. 여기서는 신뢰도가 95 %, 표준편차가 10, 표본의 크기가 25인 경우이므로 다음과 같이 입력한다.



3\ 확인을 누르면 그 수식의 결과인 3.919927969가 셀에 입력된다. 여기서 소수 셋째 자리에서 반올림하여 얻은 3.92를 이용하여 신뢰구간을 구할 수 있다.

4\ 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$195-3.92\le m\le 195+3.92,\ \text{즉}\ 191.08\le m\le 198.92$$



선거 여론 조사

역사적으로 기록된 최초의 선거 여론 조사는 1824년 미국 대통령 선거에서 시작되었다. 당시 4명의 대통령 후보가 출마하였는데, '해리스버그 펜실베이니언'이라는 신문에서 기자들을 현장에 보내 여론을 청취하여 그 결과를 신문지상에 처음으로 발표하였다. 기자들이 몇몇 사람을 조사한 결과 잭슨 후보가 당선될 것이라고 예측하였는데, 실제로는 아무도 다수표를 얻지 못해 의회에서 결선 투표가 이루어졌고 결국 대통령에는 아담스 후보가 당선되었다. 기자들이 몇 사람의 의견만 듣고 당선자를 예측하였으니 정확성이 떨어질 수밖에 없었을 것이다.

선거 여론 조사는 조사 방법론에 대한 연구가 본격화된 20세기에 이르러서야 자리를 잡게 된다. 미국에서 발행되는 '리터러리 다이제스트'라는 잡지는 전화번호부와 자동차 등록부를 이용하여 선정된 조사 응답자들을 상대로 우편엽서를 통한 여론 조사를 실시하여 1920년, 1924년, 1928년, 1932년 대통령 선거에서 선출될 후보를 정확하게 예측하였다.

그런데 똑같은 방법으로 표본을 삼아 실시된 여론 조사가 1936년 선거에서 문제를 일으키고 만다. 이 잡지는 당시에도 1000만 명의 유권자에게 설문지를 발송해서 회수된 230만 장을 집계하여 예측한 공화당의 랜던 후보의 압도적인 승리를 대대적으로 보도하였다. 그러나 결과는 민주당의 루즈벨트 후보의 압승이었다. 예측이 빗나간 원인은 표본이 전화 가입자와 자동차 소유자인 것에 있었다. 미국 역사상 최악의 경제 불황의 말기였던 시기에 지나칠 정도로 부유한 표본을 선정하였던 것이다. 표본은 빈민층을 전혀 포함하지 못하였고, 많은 수의 빈민층은 루즈벨트의 뉴딜 경기 회복 프로그램을 지지하였다. 따라서 예측이 틀릴 수밖에 없었던 것이다.

반면 같은 선거에서 '조지 갤럽'은 불과 5000명을 조사하고도 루즈벨트가 랜던을 이기리라는 것을 정확하게 예측하였는데, 그 이유는 '할당 표본 추출'을 이용하여 모집단의 특성에 따라 표본을 선정하였기 때문이다. 갤럽은 전국에서 각 소득 계층의 수를 파악하여 응답자가 각 계층에서의 정확한 비율을 나타내도록 표본을 선정하였다. 갤럽은 이 방법으로 선거 여론 조사를 하여 1940년, 1944년에도 당선자를 정확하게 예측할 수 있었다.

이처럼 여론 조사는 조사 대상자를 어떻게 선정하는지에 따라 그 결과가 달라지는데, 옳은 예측을 위해서는 모집단의 특성을 잘 반영할 수 있도록 표본을 선정해야 한다.

수 학 ✚ 실 생 활

M+ Real Life

부 록

I 순열과 조합

|준|비|학|습| [p. 11]

1 (1) 3 (2) 1
(3) 4 (4) 3

2 $(9,\ 1),\ (8,\ 2),\ (7,\ 3),\ (6,\ 4),\ (5,\ 5)$

1 순열과 조합

01 경우의 수 [p. 13~17]

1 7

2 (1) 7 (2) 6

3 20

4 (1) 25 (2) 125

5 (1) 16 (2) 24

6 $p,\ q,\ r$가 서로 다른 소수이고, $l,\ m,\ n$이 음이 아닌 정수일 때, $p^l q^m r^n$의 약수는 $p^a q^b r^c$의 꼴이다.
이때 $a,\ b,\ c$는 정수이고, $0 \le a \le l,\ 0 \le b \le m,\ 0 \le c \le n$이다.
따라서 $p^l q^m r^n$의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $(l+1)(m+1)(n+1)$이다.

사고력 기르기

예시 두 사람이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 곱의 법칙으로 구할 수 있다.

02 순열 [p. 18~27]

1 (1) 6 (2) 4 (3) 720 (4) 1680

2 (1) $n=8$ (2) $r=3$ (3) $r=4$ (4) $n=6$

3 1320

4 (1) 120 (2) 24 (3) 720 (4) 5040

5 (1) 360 (2) 144

6 (1) 144 (2) 72

7 두 도시 A, B를 직접 연결하는 도로와 세 도시 C, D, E를 직접 연결하는 도로가 없으므로 5개의 도시를 모두 여행하려면 C, D, E와 A, B를 교대로 지나가야 한다.
C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_3P_3=3!=6$
A, B를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_2P_2=2!=2$
일렬로 나열한 C, D, E 사이에 A, B를 넣어야 하므로 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$

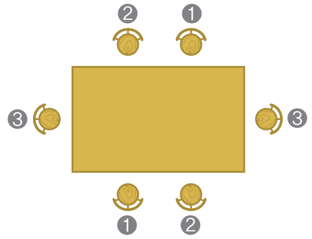
8 (가): $n-r$, (나): n

사고력 기르기

n개 중에서 A를 임의로 정하면 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) r개 중에 A가 포함되는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열한 후 A를 $(r-1)$개 사이에 배치하는 경우이므로 그 경우의 수는 $r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$
(ii) r개 중에 A가 포함되지 않는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우이므로 그 경우의 수는 $_{n-1}P_r$
(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $_nP_r={}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$이 성립함을 알 수 있다.

9 12

10 어느 한 사람이 자리를 택하는 방법은 다음 그림과 같이 ❶, ❷, ❸의 3가지이고, 나머지 5명이 앉는 방법은 일렬로 앉는 방법과 같으므로 5!가지이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3\times5!=360$



11 81

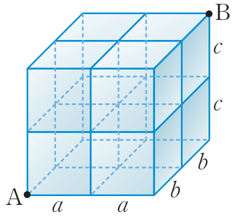
12 54

13 420

14 $\frac{5!}{3!2!}\times\frac{4!}{2!2!}=60$

창의 up

오른쪽 그림과 같이 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로



$\frac{6!}{2!2!2!}=90$

03 조합 [p. 28~34]

1 (1) 6 (2) 1
(3) 84 (4) 1

2 (1) ${}_{n+2}C_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=15$

$n^2+3n-28=0$

$(n-4)(n+7)=0$

$n\geq0$이므로 $n=4$

(2) ${}_4C_2+{}_4C_3=10$

즉, ${}_nC_2=10$이므로 $\frac{n(n-1)}{2\times1}=10$

$n^2-n-20=0$

$(n-5)(n+4)=0$

$n\geq2$이므로 $n=5$

3 35

4 (1) 56 (2) 70

5 (1) 90 (2) 209

6 (가): r, (나): $n-r$, (다): n

사고력 기르기

n개 중에서 A를 임의로 정하면 n개에서 r개를 택하는 경우는 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) r개 중에 A가 포함되는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}C_{r-1}$

(ii) r개 중에 A가 포함되지 않는 경우: A를 제외한 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_{n-1}C_r$

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 n개에서 r개를 택하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$가 성립함을 알 수 있다.

7 6

8 84

9 28

창의 up

주머니에서 꺼낸 빨간 공, 노란 공, 파란 공의 개수를 각각 a, b, c라고 하면

$a+b+c=7$, $a\geq1$, $b\geq1$, $c\geq1$

여기서 각 색깔의 공이 적어도 한 개씩은 포함되도록 하는 경우의 수를 구하는 것은 방정식 $a+b+c=7$의 양의 정수인 해의 개수를 구하는 것과 같다.

$a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$라고 하면 A, B, C는 음이 아닌 정수이다.

이것을 주어진 방정식에 대입하여 정리하면 $A+B+C=4$

따라서 $a+b+c=7$의 양의 정수인 해는 $A+B+C=4$의 음이 아닌 정수인 해와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

| 단원 과제 |

4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

중단원 기초 [p. 35]

1 11

2 (1) 120 (2) 360 (3) 56 (4) 1140

3 120

4 32

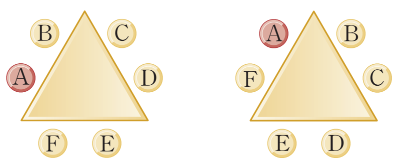
5 1260

중단원 기본 [p. 36]

1 14

2 1440

3 6명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(6-1)!=5!$
이때 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $5!\times 2=240$

4 ${}_8C_4=70$

5 ${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

중단원 실력 [p. 37]

1 ① 재질 ② 크기 ③ 색 ④ 모양이라고 하면
①, ②만 일치하는 경우의 수는 $4\times 3=12$
①, ③만 일치하는 경우의 수는 $2\times 3=6$
①, ④만 일치하는 경우의 수는 $2\times 4=8$
②, ③만 일치하는 경우의 수는 $1\times 3=3$
②, ④만 일치하는 경우의 수는 $1\times 4=4$
③, ④만 일치하는 경우의 수는 $1\times 2=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $12+6+8+3+4+2=35$

2 바깥쪽의 네 영역에 4가지 색을 칠하는 경우의 수는

$${}_8C_4\times \frac{{}_4P_4}{4}=420$$

이 경우 각각에 대하여 안쪽의 네 영역에 나머지 4가지 색을 칠하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $420\times 24=10080$

3 1의 개수가 5개인 경우의 수는 ${}_8C_5=56$
처음 네 자리가 0110인 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=16$
처음 네 자리가 0110이면서 1의 개수가 5개인 경우의 수는 ${}_4C_3=4$
따라서 보안카드의 개수는 $56+16-4=68$

4 구하는 해는 $w+x+y+z=6$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로 ${}_4H_6={}_9C_6=84$

2 분할과 이항정리

01 분할 [p. 39~45]

1 $S(5,\ 3)$

2 15

3 25

창의 up

$4=1+3=2+2$이므로 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 경우는 2가지이다.
(i) 두 모둠의 학생 수가 1명, 3명인 경우

$${}_4C_1\times {}_3C_3=4$$

(ii) 두 모둠의 학생 수가 2명, 2명인 경우

$${}_4C_2\times {}_2C_2\times \frac{1}{2!}=3$$

따라서 네 명의 학생을 두 모둠으로 나누는 분할의 수는
$S(4,\ 2)=4+3=7$

4 (1) 31 (2) 63

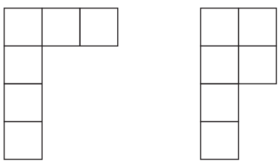
5 8명을 3개의 호텔에 나누어 투숙하게 하는 방법은 8명을 세 모둠으로 나누고, 각 모둠을 세 호텔로 구분해야 하므로 구하는 경우의 수는
$3!\times S(8,\ 3)=6\times\{S(7,\ 2)+3S(7,\ 3)\}=5796$

사고력 기르기

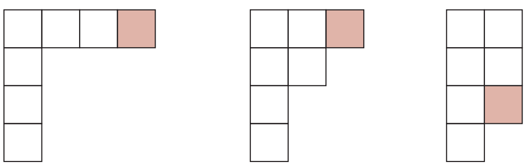
구하는 경우의 수는 n개의 원소를 가지는 집합을 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 나누는 분할의 수와 같으므로 $S(n,\ 3)$이다.

6 7

7 $P(6,\ 4)$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



각각의 그림에 정사각형 한 개를 더 그려 넣어 그림을 그리면 다음과 같이 $P(7,\ 4)$를 나타낼 수 있다.



따라서 $P(7,\ 4)=3$

8 5

9 3

창의 up

11자루의 연필을 3개의 필통에 넣을 때, 2개 이상 있어야 하므로 각 필통에 2개씩 먼저 6개를 넣으면 5개가 남는다. 따라서 구하는 경우의 수는 5자루의 연필을 3개의 필통에 넣는 경우의 수와 같으므로
$P(5,\ 1)+P(5,\ 2)+P(5,\ 3)=5$

| 단원 과제 |

모양과 크기가 같은 7개의 사탕을 같은 종류의 봉지 3개에 나누어 담는 경우의 수는 $P(7,\ 3)$과 같다.
따라서 $P(7,\ 3)=4$

02 이항정리 [p. 46~48]

1 (1) $x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$
(2) $a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$
(3) $16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4$
(4) $x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}$

2 (1) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
(2) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

3 135

4 (1) 이항정리에 의하여
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$
이 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(1-1)^n={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$
따라서 ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$
(2) $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n$ …… ①
(1)에 의하여
$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+{}_nC_{n-1}-{}_nC_n$ …… ②
①+②: $2^n=2({}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1})$
${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^{n-1}$ …… ③
①−③: $2^n-2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$
$2^{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$
따라서
${}_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$

사고력 기르기

원소의 개수가 n개인 집합에 대하여 원소의 개수가 r개인 부분집합의 개수는 ${}_nC_r$개이므로 원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수는
${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

중단원 기초 [p. 49]

1 ㉡, ㉢

2 15

3 5

4 126

5 (1) $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

(2) $x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$

중단원 기본 [p. 50]

1 (1) $S(6,\ 3)=90$ (2) $\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=15$

2 $a=P(7,\ 3)+P(7,\ 2)+P(7,\ 1)=4+3+1=8$

$b=P(7,\ 3)=4$이므로 $ab=32$

3 5

4 전개식에서 일반항은

${}_4C_r(ax^2)^{4-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_4C_r\,a^{4-r}\cdot 2^r\cdot x^{8-3r}$

$8-3r=2$에서 $r=2$이므로 x^2의 계수는 $24a^2$

따라서 $24a^2=6$이고, a는 양수이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

5 9

중단원 실력 [p. 51]

1 $30030=2\times3\times5\times7\times11\times13$

따라서 구하는 수는 집합 $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$을 공집합이 아닌 서로소인 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같으므로 $S(6,\ 3)=90$

2 (1) 10 (2) 10

3 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r\,x^{n-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_nC_r\,x^{n-2r}$

$n-2r=3(n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에서 $n=2,\ 4,\ 6$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3,\ 5$일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1이므로 x^3의 계수는 ${}_3C_0+{}_5C_1=1+5=6$

4 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{\frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{4}{5}}=4\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$$

5 서로 다른 색상의 색연필 31자루에서 16자루 이상을 선택하는 경우의 수는 ${}_{31}C_{16}+{}_{31}C_{17}+{}_{31}C_{18}+\cdots+{}_{31}C_{31}$

이때

${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15}$

$={}_{31}C_{31}+{}_{31}C_{30}+{}_{31}C_{29}+\cdots+{}_{31}C_{16}$이고,

${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{31}=2^{31}$이므로

${}_{31}C_{16}+{}_{31}C_{17}+{}_{31}C_{18}+\cdots+{}_{31}C_{31}=\dfrac{1}{2}\cdot2^{31}=2^{30}$

대/단/원 평가 문제 [p. 54~55]

1 ⑤	2 ④	3 ③	4 ③	5 ①
6 ①	7 ②	8 ③	9 ⑤	10 ②
11 14	12 2880	13 9	14 216	
15 풀이 참조		16 풀이 참조		

7 $x,\ y,\ z$가 양의 정수인 해이므로

$x+y+z\geq3$

주어진 조건에 의하여 $3\leq x+y+z<5$이므로

$x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$에 대하여 양의 정수인 해의 개수를 구하면 된다.

(i) $x+y+z=3$에서 양의 정수인 해의 개수는 ${}_3H_0=1$

(ii) $x+y+z=4$에서 양의 정수인 해의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$

따라서 해의 개수는 $1+3=4$

9 두 번째 식은 x^2, 세 번째 식은 x^3을 거듭제곱하여 더한 것이므로 x^7의 계수는 8이다. 즉, x의 차수를 고려하여 7을 세 수로 분할하는 경우를 가진 수에서 순서쌍으로 나타내면 다음과 같이 8가지이다.

$(7,\ 0,\ 0)$, $(5,\ 2,\ 0)$, $(4,\ 0,\ 3)$, $(3,\ 4,\ 0)$,

$(2,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 6,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 4,\ 3)$

10 $11^{11}=(1+10)^{11}$

$\quad={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 10+{}_{11}C_2\cdot 10^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\cdot 10^{11}$

셋째항 이후로는 100으로 나누어떨어진다.

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1\cdot 10=1+110=111$

이므로 100으로 나눈 나머지는 11

14 $N=69^5+5\cdot 69^4+10\cdot 69^3+10\cdot 69^2+5\cdot 69+1$

$\quad=(69+1)^5=70^5=2^5\cdot 5^5\cdot 7^5$

따라서 구하는 약수의 개수는

$(5+1)(5+1)(5+1)=6^3=216$

15 5개의 곡의 순서를 정하는 경우의 수는 $5!=120$

A가 처음에 오는 경우의 수는 A□□□□에서

$4!=24$

E가 마지막에 오는 경우의 수는 □□□□E에서

$4!=24$

A가 처음에 오고, E가 마지막에 오는 경우의 수는

A□□□E에서 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-(24+24-6)=78$

16 ${}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$에서

${}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}=2^{2k-1}$이므로

$f(n)=\sum_{k=1}^{n} 2^{2k-1}$

따라서 $f(5)=2^1+2^3+2^5+2^7+2^9=682$

Ⅱ 확률

|준|비|학|습| [p.61]

1 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ (2) $\{2, 4\}$

(3) $\{6, 8\}$ (4) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

2 (1) 90 (2) 45

1 확률의 뜻과 활용

01 확률의 뜻 [p.63~70]

1 $S=\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

$A=\{(H, H), (T, T)\}$

2 (1) 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이다.

(2) $A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

3 $\frac{5}{36}$

4 $\frac{5}{16}$

5 (1) $\frac{28}{45}$ (2) $\frac{16}{45}$

6 남자 3명과 여자 5명이 임의로 원탁에 앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!=5040$

남자끼리는 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$(5-1)!\times{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$

창의 up

빵 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

(i) 단팥빵 2개, 크림빵 또는 야채빵을 1개 선택하는 경우의 수: ${}_3C_2\times{}_3C_1=9$

(ii) 크림빵 2개, 단팥빵 또는 야채빵을 1개 선택하는 경우의 수: ${}_2C_2\times{}_4C_1=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9+4}{20}=\frac{13}{20}$

7 0.03

8 0.487

사고력 기르기

매 타수마다 안타를 칠 확률은 $\frac{1197}{3800}=0.315$

이번 시즌에 칠 수 있는 안타의 개수를 r라고 하면

$\frac{r}{400}=0.315$이므로 $r=400\times0.315=126$

02 확률의 기본 성질 [p.71~76]

1 (1) 1 (2) 0

2 $\frac{5}{6}$

3 (1) $\frac{13}{20}$ (2) $\frac{13}{20}$

4 남녀 8명 중 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_2$이므로 전체 경우의 수는 28이고 뽑은 2명이 모두 남자인 사건을 A, 모두 여자인 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{{}_3C_2}{28}=\frac{3}{28}$, $P(B)=\frac{{}_5C_2}{28}=\frac{5}{14}$

두 사건은 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A)+P(B)=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$

사고력 기르기

천호가 가장 먼저 달리는 사건을 A, 민호보다 나중에 달리는 사건을 B라고 하면

$P(A)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

5 $\frac{5}{6}$

6 $\frac{7}{8}$

7 A, B, C 등급을 받은 사람은 각각 9명, 12명, 9명이다. 전체 직원 30명 중 4명을 임의로 선택했을 때, 4명 모두 B 또는 C 등급을 받은 사람이 선택되는 사건을 E라 고 하면, A 등급을 받은 사람이 적어도 1명 포함되는 사건은 E^C이다.

$P(E^C)=1-P(E)=1-\frac{19}{87}=\frac{68}{87}$

| 단원 과제 |

35명의 생일이 모두 다른 사건을 A라고 하면 35명 중에서 생일이 서로 같은 두 학생이 있게 되는 사건은 A^C이다.

$P(A)=\frac{{}_{365}P_{35}}{{}_{365}\Pi_{35}}=0.1856\cdots$

이므로 구하는 확률은

$P(A^C)=1-P(A)=1-0.1856\cdots=$약 0.814

중단원 기초 [p.77]

1 서로 배반사건인 것은 사건 B와 C이다.

2 $\frac{2}{5}$

3 (1) 0 (2) 1

(3) $\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$

4 $\frac{2}{3}$

5 $\frac{5}{6}$

중단원 기본 [p.78]

1 $\frac{10}{21}$

2 $\frac{4}{15}$

3 주머니 속에 빨간 구슬이 n개 들어 있다고 하면

$$\frac{{}_{n}C_{2}}{{}_{7}C_{2}}=\frac{1}{7}$$

$n(n-1)=6$

$n>0$이므로 $n=3$

따라서 주머니 속에 빨간 구슬이 3개 들어 있다고 볼 수 있다.

4 2의 배수가 되려면 일의 자리 숫자가 2, 4, 6, 8이 되어야 하고, 5의 배수가 되려면 일의 자리 숫자가 5가 되어야 한다.

네 자리의 자연수가 2의 배수가 되는 사건을 A, 5의 배수가 되는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{8}P_{3}\times 4}{{}_{9}P_{4}}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{8}P_{3}\times 1}{{}_{9}P_{4}}=\frac{1}{9}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

5 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 ${}_{6}\Pi_{3}=6\times6\times6=216$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건의 여사건은

$x\neq y,\ y\neq z,\ z\neq x$

즉, 주사위의 눈의 수가 각각 다른 사건이므로 그 경우의 수는 ${}_{6}P_{3}=6\times5\times4=120$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{120}{216}=\frac{4}{9}$$

중단원 실력

[p.79]

1 표본공간 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여

$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$

A^{C}와 C는 서로 배반사건이므로

$C\subset(A^{C})^{C}=A=\{2, 3, 5, 7\}$

또 B와 C도 서로 배반사건이므로

$C\subset B^{C}=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 $C\subset\{3, 5, 7\}$이고 $C\neq\varnothing$이므로 사건 C의 개수는 $2^{3}-1=7$

2 $x^{2}+2ax+b\geq 2x-1$에서 $x^{2}+2(a-1)x+b+1\geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$$\frac{D}{4}=(a-1)^{2}-(b+1)\leq 0$$

따라서 $(a-1)^{2}\leq b+1$

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 할 때, 순서쌍 (a, b)가 $(a-1)^{2}\leq b+1$을 만족시키는 사건을 A라고 하면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

3 A에서 B로의 함수의 개수는 ${}_{3}\Pi_{5}=243$

A에서 B로의 함수 중에서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는 집합 A를 3개의 공집합이 아닌 서로소인 부분집합으로 분할하여 각 부분집합의 원소를 집합 B의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 모든 경우의 수와 같으므로

$S(5, 3)\times 3!=25\times 3!=150$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

4 원반 모양의 과녁에 화살을 4번 던져서 맞힌 수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 모든 개수는 ${}_{6}\Pi_{4}=6^{4}$

$a\leq b<c\leq d$를 만족시키는 각 경우에 대한 확률은

(i) $a<b<c<d$인 경우: $\dfrac{{}_{6}C_{4}}{6^{4}}$

(ii) $a=b<c<d$인 경우: $\dfrac{{}_{6}C_{3}}{6^{4}}$

(iii) $a<b<c=d$인 경우: $\dfrac{{}_{6}C_{3}}{6^{4}}$

(iv) $a=b<c=d$인 경우: $\dfrac{{}_{6}C_{2}}{6^{4}}$

각 경우는 배반이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_{6}C_{4}}{6^{4}}+\frac{{}_{6}C_{3}}{6^{4}}+\frac{{}_{6}C_{3}}{6^{4}}+\frac{{}_{6}C_{2}}{6^{4}}=\frac{35}{648}$$

5 동시에 꺼낸 3개의 제비 중에서 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 $\frac{29}{57}$이므로 모두 당첨 제비가 아닐 확률은

$1-\frac{29}{57}=\frac{28}{57}$

즉, $\frac{{}_{20-r}C_3}{{}_{20}C_3}=\frac{28}{57}$이므로

$\frac{(20-r)(19-r)(18-r)}{20\times19\times18}=\frac{28}{57}$

$(20-r)(19-r)(18-r)=16\times15\times14$

따라서 $r=4$

2 조건부확률

01 조건부확률 [p.81~85]

1 $\frac{2}{7}$

2 $\frac{2}{3}$

3 $\frac{1}{4}$

사고력 기르기

광고성 우편 100통 중에서 차단된 우편은 95통이고, 정상 우편 100통 중에서 차단된 우편은 2통이므로 차단된 우편은 모두 97통이다.

따라서 임의로 한 통의 우편을 뽑았을 때, 차단된 우편인 사건을 A, 광고성 우편인 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{95}{200}}{\frac{97}{200}}=\frac{95}{97}$$

4 $\frac{5}{6}$

5 첫 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 하는 사건을 A, 두 번째 제비를 뽑은 학생이 복도 청소를 하는 사건을 B라고 하면,

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\&=P(A)P(B|A)+P(A^C)P(B|A^C)\\&=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

사고력 기르기

첫 번째, 두 번째, 세 번째 제비를 뽑을 때 당첨 제비를 뽑는 사건을 각각 A, B, C라고 하면,

$P(A)=\frac{3}{10}$

$$\begin{aligned}P(B)&=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

A	B
○	○
×	○

$$\begin{aligned}P(C)=&\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\\&+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\\&+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\\&+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\\=&\frac{3}{10}\end{aligned}$$

A	B	C
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	○

따라서 뽑는 순서에 상관없이 당첨 제비가 나올 확률은 같다.

02 사건의 독립과 종속 [p.86~90]

1 $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로

$P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{2}$

또 $A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{2, 4, 6\}$, $A\cap C=\{2, 3\}$이므로

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$, $P(B\cap C)=\frac{3}{10}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{5}$

(1) $P(A\cap B)=\frac{1}{10}\neq P(A)P(B)=\frac{1}{5}$이므로 사건 A와 B는 서로 종속이다.

(2) $P(B\cap C)=\frac{3}{10}\neq P(B)P(C)=\frac{1}{4}$이므로 사건 B와 C는 서로 종속이다.

(3) $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{5}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$이므로 사건 A와 C는 서로 독립이다.

2 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
(1) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$
따라서 두 사건 A와 B^C은 서로 독립이다.
(2) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}$
$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)$
따라서 두 사건 A^C과 B는 서로 독립이다.
(3) $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)P(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
따라서 두 사건 A^C과 B^C은 서로 독립이다.

사고력 기르기

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이다. 또 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다. 따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.

예시 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 3 이하의 눈이 나오는 사건을 A라 하고 4 이상의 눈이 나오는 사건을 B라고 할 때, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이므로 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이지만 서로 독립은 아니다.

3 투수가 던진 4개의 공 중 3개가 스트라이크가 될 확률은 독립시행의 확률에 의하여
${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{256}{625}$

| 단원 과제 |

A가 2번, B가 1번을 이긴 상태에서 앞으로 일어날 수 있는 모든 경우는
(i) A가 이기는 경우
(ii) B가 연속해서 2번 이기는 경우
(iii) B가 이긴 다음 A가 이기는 경우
의 3가지이다.
이때 시합을 하는 각 시행은 독립이고 A와 B가 각각 32피스톨씩 돈을 내어 먼저 3번 이기는 사람이 64피스톨을 모두 갖기로 하였으므로
(A의 기대 금액)$=64\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=48$(피스톨)
(B의 기대 금액)$=64\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=16$(피스톨)
따라서 파스칼의 답변과 같이 A, B에게 각각 48피스톨, 16피스톨씩 분배하는 것이 맞다.

중단원 기초 [p. 91]

1 $\frac{5}{6}$

2 $\frac{3}{4}$

3 $\frac{1}{45}$

4 $0.3\times0.2\times0.1=0.006$

5 4문제를 맞출 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$
5문제를 맞출 확률은 ${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{243}{1024}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$

중단원 기본 [p. 92]

1 $\frac{10}{21}$

2 $\frac{13}{35}$

3 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{12}$

(i) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로

사건 B와 C는 서로 독립이다.

(iii) $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{12}\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{8}$이므로

사건 A와 C는 서로 종속이다.

4 4개 팀을 2개의 조로 나누는 모든 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}=3$

A팀과 B팀이 같은 조에 속하면 반드시 경기를 하게 되므로 이때의 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 이때 A팀과 B팀은 반드시 경기를 한다.

한편 A팀과 B팀이 다른 조에 속할 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 이때 A팀과 B팀이 경기를 하려면 두 팀이 모두 처음 경기에서 이겨야 한다. 두 팀이 경기에서 이기고 지는 사건은 서로 독립이므로 두 팀이 결승전을 치르게 될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

5 한 개의 윷짝을 던져서 윷짝의 둥근 면이 나올 확률을 p라고 하자.

윷짝 4개를 던져서 '모'가 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4p^4$

이때 '모'가 나올 확률이 $0.0256=\frac{4^4}{10^4}=\left(\frac{2}{5}\right)^4$이므로

$p^4=\left(\frac{2}{5}\right)^4$에서 $p=\frac{2}{5}$

따라서 '걸'이 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$

중단원 실력

[p. 93]

1 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 2자루의 색연필이 모두 초록 색연필인 사건을 A, 주머니 B에서 꺼낸 2자루의 색연필이 모두 초록 색연필인 사건을 B라고 하면 사건 B가 일어나는 경우는 다음의 3가지이다.

옮겨진 색연필	사건 B가 일어날 확률
파란 색연필 2자루	$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{225}$
파란 색연필 1자루, 초록 색연필 1자루	$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{16}{225}$
초록 색연필 2자루	$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{45}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{225}+\frac{16}{225}+\frac{4}{45}=\frac{37}{225}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{4}{45}}{\frac{37}{225}}=\frac{20}{37}$$

2 다음 날 꺼낸 공 2개가 사용한 적이 없는 새 공인 사건을 A라고 하면 사건 A가 일어나는 각 경우에 대한 확률은

(i) 전날 사용한 2개가 모두 이전에 사용한 적이 있었던 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우:

$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{45}$

(ii) 전날 사용한 공 중 1개만 이전에 사용한 적이 있었던 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우: $\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{16}{135}$

(iii) 전날 사용한 공 2개가 모두 이전에 사용한 적이 없었던 새 공이고, 다음 날 꺼낸 공 2개가 모두 새 공인 경우: $\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{45}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{45}+\frac{16}{135}+\frac{2}{45}=\frac{28}{135}$

3 사은품으로 2병의 A 음료수를 받는 사건을 A라고 하면, 사건 A가 일어나는 각 경우에 대한 확률은

(i) 5병 중 2병의 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 사은품으로 받은 2병의 병뚜껑에는 '한 병 더'라는 글씨가 없는 경우:

$${}_5C_2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^3\times{}_2C_0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{9^5}{10^6}$$

(ii) 5병 중 1병의 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 사은품으로 받은 1병의 병뚜껑에도 '한 병 더'라는 글씨가 있고, 또다시 받은 사은품의 병뚜껑에는 '한 병 더'라는 글씨가 없는 경우:

$${}_5C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^4\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9^5\times5}{10^7}$$

$$\mathrm{P}(A)=\frac{9^5}{10^6}+\frac{9^5\times5}{10^7}=\frac{3^{11}}{2\times10^6}$$

따라서 $a=6$, $b=11$이므로 $a+b=17$

4 A–B–C–D–A는 거리가 4이므로 한 번은 홀수가 나와야 한다. 따라서 주사위를 3번 던질 때, 짝수가 2번 나오는 확률을 구하면

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}=\frac{3}{8}$$

대/단/원 평가 문제 [p. 96~97]

1 ④	**2** ①	**3** ⑤	**4** ②	**5** ③
6 ④	**7** ③	**8** ③	**9** ④	**10** ④
11 $\frac{1}{40}$	**12** $\frac{3}{7}$	**13** 3920	**14** $\frac{17}{81}$	
15 풀이 참조		**16** 풀이 참조		

7 빨간 공의 개수를 n이라고 하면 노란 공의 개수는 $10-n$이다. 을이 빨간 공을 꺼내는 각 경우에 대한 확률은

(i) 갑이 빨간 공을 꺼내고 을도 빨간 공을 꺼내는 경우:

$$\frac{n}{10}\times\frac{n-1}{9}$$

(ii) 갑이 노란 공을 꺼내고 을은 빨간 공을 꺼내는 경우:

$$\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{9}$$

각 경우는 서로 배반이므로 을이 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{n}{10}\times\frac{n-1}{9}+\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{9}=\frac{2}{5}$$

이므로 $n=4$

10 동전의 앞면이 2번 나오는 경우는 다음의 5가지이다.

주사위의 눈의 수	동전의 앞면이 2번 나올 확률
2	$\frac{1}{6}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0$
3	$\frac{1}{6}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$
4	$\frac{1}{6}\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$
5	$\frac{1}{6}\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$
6	$\frac{1}{6}\times{}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}\times\left\{{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}$$

$$=\frac{33}{128}$$

11 5개의 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 써서 만들 수 있는 모든 4자리의 비밀번호의 개수는

${}_5P_4=120$

지상이가 돈을 인출할 수 있는 경우는 다음의 3가지이다.

1회	2회	3회	확률
○			$\frac{1}{120}$
×	○		$\frac{119}{120}\times\frac{1}{119}$
×	×	○	$\frac{119}{120}\times\frac{118}{119}\times\frac{1}{118}$

각 경우는 서로 배반이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{120}+\frac{119}{120}\times\frac{1}{119}+\frac{119}{120}\times\frac{118}{119}\times\frac{1}{118}=\frac{1}{40}$$

14 A팀이 우승하는 각 경우에 대한 확률은

(i) 1, 2, 3세트를 계속 이기는 경우: $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii) 1, 2, 3세트 중 두 세트를 이기고 4세트를 이기는 경우: ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(iii) 1, 2, 3, 4세트 중 두 세트를 이기고 5세트를 이기는 경우: ${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}=\frac{17}{81}$

15 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수에 따라 주머니 B에서 빨간 공을 1개 뽑을 확률을 구해 보면 다음과 같다.

카드에 적혀 있는 수	빨간 공 1개를 뽑을 확률
1	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}=\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{5}{28}$
3	$\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{5}{28}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{27}{56}$

16 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$에서 $\frac{1}{3}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{4}}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

한편 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

Ⅲ 통계

|준|비|학|습| [p. 101]

1 (1) $\frac{12}{35}$ (2) $\frac{1}{7}$

2 평균: 32000원, 표준편차: $1000\sqrt{26}$원

1 확률분포

01 확률변수와 확률분포 [p. 103~112]

1 (1) $\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3C_x\times{}_4C_{2-x}}{{}_7C_2}$ $(x=0,\ 1,\ 2)$

(2)

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

(3) $\frac{6}{7}$

2 7

3 $\mathrm{V}(X)=1,\ \sigma(X)=1$

4 $\mathrm{V}(X)=\frac{5}{3},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{3}$

5 $\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

6 $\sigma(X)=\frac{3}{5}$

7 $\mathrm{V}(X)=5000,\ \sigma(X)=50\sqrt{2}$

8 (1) $\mathrm{E}(4X-1)=31$
$\mathrm{V}(4X-1)=32$
$\sigma(4X-1)=4\sqrt{2}$
(2) $\mathrm{E}(-2X+3)=-13$
$\mathrm{V}(-2X+3)=8$
$\sigma(-2X+3)=2\sqrt{2}$

9 $E(Y)=8$, $\sigma(Y)=\dfrac{\sqrt{38}}{2}$

10 $\dfrac{m-a}{b}=0$이고 $\dfrac{1}{|b|}\sigma=1$이어야 하므로

$a=m$, $b=\sigma$ 또는 $a=m$, $b=-\sigma$

창의 up

$E(T)=\dfrac{10}{\sigma}\{E(X)-m\}+50=50$

$\sigma(T)=\left|\dfrac{10}{\sigma}\right|\sigma=10$

02 이항분포 [p.113~118]

1 $P(X=x)={}_4C_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

2 (1) $B\left(3,\ \dfrac{3}{7}\right)$

(2) $P(X=x)={}_3C_x\left(\dfrac{3}{7}\right)^x\left(\dfrac{4}{7}\right)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(3) $\dfrac{135}{343}$

3 (1) $E(X)=15$

$V(X)=10$

$\sigma(X)=\sqrt{10}$

(2) $E(X)=80$

$V(X)=48$

$\sigma(X)=4\sqrt{3}$

4 $E(X)=90$

$V(X)=9$

$\sigma(X)=3$

5 $P\left(\left|\dfrac{X}{10}-\dfrac{1}{6}\right|<0.05\right)=0.2907$

$P\left(\left|\dfrac{X}{30}-\dfrac{1}{6}\right|<0.05\right)=0.5369$

$P\left(\left|\dfrac{X}{50}-\dfrac{1}{6}\right|<0.05\right)=0.6599$

03 정규분포 [p.119~130]

1 $a=\dfrac{1}{12}$, $b=\dfrac{5}{24}$

2 $\dfrac{1}{2}$

사고력 기르기

확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)\ (1\le x\le 5)$일 때, $1\le a\le b\le 5$인 a, b에 대하여 $P(a\le X\le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$P(X=2)=P(2\le X\le 2)=0$

3 (1) $m_A=m_B<m_C$ (2) $\sigma_A>\sigma_B=\sigma_C$

4 (1) 0.9664 (2) 0.0267

(3) 0.8289 (4) 0.9500

5 (1) 0.6826 (2) 0.0215 (3) 0.0228

6 15.87 %

7 2.17

사고력 기르기

(1) 국어: 0.75, 수학: 1.25, 영어: 0.5

(2) $P(Z\ge 0.75)=0.2266$이므로 진수보다 국어 점수가 높은 학생은 8명 정도 있다고 볼 수 있으므로 9등

$P(Z\ge 1.25)=0.1056$이므로 진수보다 수학 점수가 높은 학생은 4명 정도 있다고 볼 수 있으므로 5등

$P(Z\ge 0.5)=0.3085$이므로 진수보다 영어 점수가 높은 학생은 11명 정도 있다고 볼 수 있으므로 12등

(3) 가장 낮은 점수를 얻은 수학이 가장 등수가 높다. 이와 같이 평균과 표준편차가 제각각인 정규분포를 표준화하여 표준정규분포표를 이용해 구하고자 하는 확률뿐만 아니라 상대적 위치도 쉽게 구할 수 있다.

8 0.0668

| 단원 과제 |

48번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

이때 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge15)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-12}{3}\ge\frac{15-12}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

중단원 기초

[p.131]

1 $\mathrm{E}(X)=5,\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{42}}{3}$

2 (1) $\mathrm{E}(X)=25,\ \mathrm{V}(X)=\frac{75}{4},\ \sigma(X)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) $\mathrm{E}(X)=5,\ \mathrm{V}(X)=\frac{25}{6},\ \sigma(X)=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

3 $\frac{1}{4}$

4 0.0228

5 0.4332

중단원 기본

[p.132]

1 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

$k+4k+9k+16k=1$이므로 $k=\frac{1}{30}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge3)&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\\&=\frac{9}{30}+\frac{16}{30}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

2 17

3 $\frac{5}{2}$

4 학생들의 통학 시간을 확률변수 X라고 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 10^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge40)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-32}{10}\ge\frac{40-32}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0.8)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.8)\\&=0.2119\end{aligned}$$

5 0.3085

중단원 실력

[p.133]

1 $a\ge b$일 확률, 즉 2점을 얻을 확률은 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던지는 시행을 10번 했을 때, 2점을 얻은 횟수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{7}{12}\right)$을 따른다.

이때 두 개의 주사위 A, B를 동시에 10번 던진 후의 점수는 $X=50+2Y-4(10-Y)=6Y+10$이므로

$\sigma(X)=\sigma(6Y+10)=6\sigma(Y)$

이때 $\sigma(Y)=\sqrt{10\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}}=\frac{5\sqrt{14}}{12}$이므로

$\sigma(X)=6\times\frac{5\sqrt{14}}{12}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$

2 한 개의 주사위를 5번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

13^X의 평균을 구해야 하므로 13^X을 포함하여 표를 그리면 다음과 같다.

13^X	…	13^r	…
X	…	r	…
$\mathrm{P}(X=x)$	…	${}_5\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$	…

$$E(13^X)=\sum_{r=0}^{5}13^r\cdot{}_5C_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$
$$=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r\left(\frac{13}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$
$$=\left(\frac{13}{6}+\frac{5}{6}\right)^5=3^5$$
$$=243$$

3 $P(-2\le X\le a)=1$이므로

$P(-2\le X\le a)=\frac{1}{2}\times(a+2)\times b=1$

$ab+2b=2$ …… ①

$P\left(\frac{a}{2}\le X\le a\right)=\frac{b}{8}$이므로

$P\left(\frac{a}{2}\le X\le a\right)=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}=\frac{b}{8}$, $a=1$

①에 대입하면 $b=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(0\le X\le a)=P(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

4 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$

$P(0\le Z\le 2)=0.4772$

$P(0\le Z\le 3)=0.4987$

따라서

$P(-2\le Z\le -1)+P(1\le Z\le 3)$

$=(0.4772-0.3413)+(0.4987-0.3413)$

$=0.2933$

5 100번의 자유투에서 성공한 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.8)$을 따르므로

$E(X)=100\times0.8=80$

$V(X)=100\times0.8\times0.2=16$

이때 확률변수 X는 정규분포 $N(80,\ 4^2)$에 가까워지므로 구하는 확률은

$$P(X\le k)=P\left(Z\le\frac{k-80}{4}\right)$$
$$=0.5-P\left(\frac{k-80}{4}\le Z\le 0\right)$$
$$=0.1587$$

$P\left(\frac{k-80}{4}\le Z\le 0\right)=0.3413$

한편 주어진 표준정규분포표에 의하여

$P(0\le Z\le 1)=P(-1\le Z\le 0)=0.3413$이므로

$k=76$

2 통계적 추정

01 모집단과 표본 [p.135~140]

1 표본조사

모집단: 우리나라 고등학생 전체

표본: 임의로 뽑은 3000명

2 예시

반 학생이 40명이라고 하자.

① A1 셀에 '=RANDBETWEEN(1, 40)'을 입력한다.

② A1 셀의 내용을 채우기 핸들을 이용하여 A5 셀까지 입력하여 5개의 난수를 발생시킨다.

3 (1) 900 (2) 870

4 $E(\overline{X})=150$, $\sigma(\overline{X})=\frac{8}{5}$

5 0.9710

6 한 상자에 담겨 있는 곶감 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(58,\ 2^2)$을 따른다.

곶감 25개의 무게가 1.5 kg 이상이려면

$\overline{X}\ge\frac{1500}{25}=60$이어야 하므로

$$P(\overline{X}\ge 60)=P\left(Z\ge\frac{60-58}{2}\right)=P(Z\ge 1)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 1)=0.5-0.3413$$
$$=0.1587$$

따라서 최상품의 비율은 15.87 %이다.

02 모평균의 추정 [p. 141~143]

1 $72.26 \le m \le 87.74$

사고력 기르기

(1) 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.
(2) 같은 신뢰도로 모집단의 평균을 추정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
(3) 같은 신뢰도로 모집단의 평균을 추정할 때, 표준편차가 커지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

03 모비율의 추정 [p. 144~148]

1 0.18

2 0.1587

3 임의추출한 1000마리 중에서 회귀 연어의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 $p=0.002$, $n=1000$이므로

$E(\hat{p})=p=0.002$

$V(\hat{p})=\dfrac{pq}{n}=\dfrac{0.002\times0.998}{1000}=(0.0014)^2$

이고 표본의 크기가 충분히 크므로,

표본비율 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.002,\ (0.0014)^2)$에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$P\left(\hat{p}\ge\frac{4}{1000}\right)$$
$$=P\left(\frac{\hat{p}-0.002}{0.0014}\ge\frac{0.004-0.002}{0.0014}\right)$$
$$=P(Z\ge1.43)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le1.43)$$
$$=0.5-0.4236=0.0764$$

창의 up

임의추출한 300명 중에서 혈액형이 B형인 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(300,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=300\times\frac{1}{4}=75$

$V(X)=300\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{15}{2}\right)^2$

이때 표본의 크기 $n=300$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $N\left(75,\ \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$에 가까워진다.

$$P(75\le X\le90)=P\left(\frac{75-75}{\frac{15}{2}}\le\frac{X-75}{\frac{15}{2}}\le\frac{90-75}{\frac{15}{2}}\right)$$
$$=P(0\le Z\le2)=0.4772$$

따라서 그 결과는 같다.

4 $0.1855\le p\le0.3145$

| 단원 과제 |

전체 붕어 중에서 표지를 단 붕어의 모비율을 p라고 하면 $n=100$, $\hat{p}=\frac{20}{100}=0.2$이므로 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p\le0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

$0.1216\le p\le0.2784$

따라서 저수지에 살고 있는 전체 붕어의 수를 N이라고 하면

$0.1216\le\frac{50}{N}\le0.2784$

$179.59\cdots\le N\le411.18\cdots$

따라서 전체 붕어의 수는 180마리 이상 411마리 이하로 추정할 수 있다.

중단원 기초 [p. 149]

1 $E(\overline{X})=60$, $\sigma(\overline{X})=\frac{1}{3}$

2 0.1056

3 $57.02\le m\le58.98$

4 0.8413

5 $0.23616\le p\le0.48384$

중단원 기본 [p.150]

1 0.0062

2 $60-2.58\frac{6}{\sqrt{81}}\le m\le 60+2.58\frac{6}{\sqrt{81}}$

따라서 $58.28\le m\le 61.72$

3 0.1359

4 모비율 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 양 끝 값은

$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}=0.1216$

$\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}=0.2784$

두 식을 더하여 정리하면 $\hat{p}=0.2$

중단원 실력 [p.151]

1 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\frac{Y}{8}=\overline{X}$이므로 $Y=8\overline{X}$

$\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{E}(8\overline{X})+\mathrm{V}(8\overline{X})\\&=8\mathrm{E}(\overline{X})+64\mathrm{V}(\overline{X})\\&=160+32\\&=192\end{aligned}$$

2 모평균을 m, 모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n이라고 하면

$\mathrm{P}\left(\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$이므로

$\mathrm{P}\left(-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$

$\mathrm{P}\left(|m-\overline{X}|\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.99$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 0.01 이하이어야 하므로

$2.58\times\frac{0.3}{\sqrt{n}}\le 0.01$이고 $\sqrt{n}\ge 77.4$

$n\ge 5990.76$이므로 표본의 크기의 최솟값은 5991

3 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.7,\left(\sqrt{\frac{0.21}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\hat{p}\le 0.8)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.8-0.7}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}\right)=0.8413$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}\right)=0.3413$

이고 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로 $\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}=1$

$0.01=\frac{0.21}{n}$이므로 $n=21$

4 전구의 불량률을 p라고 하면 $\hat{p}=\frac{10}{100}=0.1$

전구의 불량률을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간 $\alpha\le p\le\beta$에 대하여

$\beta-\alpha=2\times 2.58\times\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}\le\frac{3}{100}$

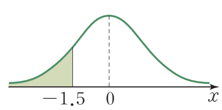
$\sqrt{n}\ge 51.6,\ n\ge 2662.56$

따라서 2663개 이상 조사하여야 한다.

대/단/원 평가 문제 [p.154~155]

1 ②	**2** ②	**3** ③	**4** ①	**5** ⑤
6 ①	**7** ⑤	**8** ⑤	**9** ④	**10** ②
11 -10	**12** $\frac{20}{27}$	**13** $29.608\le m\le 30.392$		
14 $0.6968\le p\le 0.9032$			**15** 풀이 참조	
16 풀이 참조				

5 학생의 몸무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 4^2)$을 따르므로



$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le 54)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{54-60}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 $0.0668\times 5000=334$(명)

10 표본의 크기를 n이라고 하면 신뢰도가 95 %일 때 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$$

이때 신뢰구간의 길이가 1 이하이어야 하므로

$$2\times1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le1,\ \sqrt{n}\ge15.68$$

따라서 $n\ge245.8624$이므로 구하는 표본의 크기의 최솟값은 246이다.

12 학교까지 가는 데 걸리는 시간이 30분이 넘으면 지각을 하므로 지각할 확률은

$$P(X>30)=10\times\frac{2}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

따라서 채원이가 3일 중에서 2일 이상 지각할 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{20}{27}$$

15 이 선수가 100번의 타석에서 안타를 친 횟수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$$

$$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(20,\ 4^2)$에 가까워지므로

$$\begin{aligned}P(X\ge28)&=P\left(Z\ge\frac{28-20}{4}\right)\\&=P(Z\ge2)\\&=0.5-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

16 한 상자에 담겨 있는 딸기 100개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50,\ 1^2)$을 따른다.

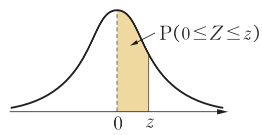
딸기 100개의 무게가 4.7 kg 이하이려면

$\overline{X}\le\frac{4700}{100}=47$이어야 하므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le47)&=P\left(Z\le\frac{47-50}{1}\right)\\&=P(Z\le-3)\\&=0.5-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

따라서 200만 개의 딸기를 한 상자에 100개씩 포장하면 2만 상자이므로 이 상자 중에서 불량품으로 판정되는 상자의 수는 $20000\times0.0013=26$

표준정규분포표



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998

용어

기호

사진 자료 출처

뉴스뱅크 이미지 • • 39쪽

셔터스톡 • • 10쪽, 12쪽, 32쪽, 45쪽, 52쪽, 64쪽, 66쪽, 68쪽, 75쪽, 81쪽, 89쪽, 102쪽, 103쪽, 106쪽, 110쪽, 114쪽, 126쪽, 136쪽, 140쪽, 145쪽, 151쪽

유로크레온 • • 23쪽, 34쪽, 135쪽

토픽이미지 • • 13쪽, 15쪽, 18쪽, 23쪽, 25쪽, 28쪽, 29쪽, 35쪽, 38쪽, 42쪽, 43쪽, 44쪽, 50쪽, 51쪽, 58쪽, 60쪽, 62쪽, 65쪽, 68쪽, 71쪽, 73쪽, 77쪽, 84쪽, 91쪽, 99쪽, 100쪽, 113쪽, 116쪽, 130쪽, 132쪽, 134쪽, 140쪽, 144쪽, 146쪽, 150쪽, 152쪽, 159쪽

기타 • • 엘지트윈스(http://www.lgtwins.com) – 70쪽

인용 자료 출처

12쪽, 권혁빈 외 5인, 고등학교 생명 과학Ⅱ, (주)교학사, 2012, pp.122~159

12쪽, 김해경 외 1인, (실용이야기와 함께하는) 확률과 통계, 경문사, 2009, pp.31

12쪽, 황석근 외 2인, ENV 이산수학, 성안당, 2006, pp.39~41

13쪽, 한국자동차산업협회(http://www.kama.or.kr)

15쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

17쪽, 부산광역시차량등록사업소(http://car.busan.go.kr)

18쪽, 한국스포츠심리학회(http://www.kssp.or.kr)

23쪽, 문화재청(http://www.cha.go.kr)

28쪽, 동아일보(http://www.donga.com), 2005. 5. 27.

38쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

63쪽, 김해경 외 1인, (실용이야기와 함께하는) 확률과 통계, 경문사, 2009, pp.12~13

68쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

69쪽, 국가통계포털(http://www.kosis.kr)

71쪽, 시사저널(http://www.sisapress.com), 2006. 6. 2.

80쪽, 고상숙, 고호경, 청소년을 위한 서양 수학사, 두리미디어, 2006, pp.293~294

81쪽, 서울대학교병원(http://www.snuh.org)

99쪽, 일본 뉴턴프레스(강금희 역), Newton HIGHLIGHT–신비한 수학의 세계 우주와 수학의 법칙을 말한다, 뉴턴코리아, 2009, pp.144

102쪽, 김진호, 한국경제신문–생글생글(http://www.sgsgi.com), 2006. 8. 18.

103쪽, 고상숙, 고호경, 청소년을 위한 서양 수학사, 두리미디어, 2006, pp.295

103쪽, 김용운, 수학사대전, 경문사, 2010, pp.188~193

106쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

113쪽, 동아비지니스리뷰 70호, 동아일보사편집부, 2010. 12. 1.

134쪽, 농촌진흥청(http://www.rda.go.kr)

135쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)

144쪽, 조선일보(http://www.chosun.com), 2012. 7. 26.

144쪽, 질병관리본부(http://www.cdc.go.kr)

146쪽, YTN(http://www.ytn.co.kr), 2012. 10. 27.

159쪽, 한국일보(http://www.hankooki.com), 2007. 2. 26.

집필진

* **신항균**	서울교육대학교 총장	**이광연**	한서대학교 교수	**박세원**	신경대학교 교수	**신범영**	청담중학교 교감
이계세	경기도학생교육원 교육연구사	**김정화**	서울고등학교 교사	**박문환**	인천인제고등학교 교사	**윤정호**	대구과학고등학교 교사
박상의	장충고등학교 교사	**서원호**	청원고등학교 교감	**전제동**	창원중앙고등학교 교사	**이동흔**	숭문고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* **박규홍**	서원대학교	**김미경**	연송고등학교	**전효진**	가림고등학교	**고명호**	인천국제고등학교
정옥경	인천신현고등학교	**이재성**	인천공항고등학교	**윤효진**	인천고등학교	**차요섭**	인천대건고등학교
김동수	신명여자고등학교	**배혜정**	옥련여자고등학교	**오경민**	학익고등학교	**김현희**	인일여자고등학교
정미라	제물포고등학교	**임병태**	영종국제물류고등학교	**김종오**	광성고등학교	**신선희**	인천청라고등학교
최중근	인천초은고등학교	**이종현**	작전여자고등학교	**이선희**	문일여자고등학교	**고아라**	부평고등학교
이진	세일고등학교	**강신석**	인천과학고등학교	**유경민**	연수여자고등학교	**박숭열**	인천예일고등학교
양재원	인천영선고등학교	**김희경**	도림고등학교	**우연희**	서운고등학교	**김성식**	부광여자고등학교
양혜순	인천부흥고등학교	**윤세정**	부광고등학교	**이혜연**	백석고등학교	**최미희**	작전고등학교
권태룡	동인천고등학교	**류주현**	부평여자고등학교	**박은희**	연수고등학교	**김기선**	인천광성중학교
김현옥	신송고등학교	**김윤정**	인천국제고등학교	**조영식**	인천부흥고등학교	**홍지연**	인천신현고등학교
민선애	인천공항고등학교	**김진영**	인천진산과학고등학교	**신은주**	인일여자고등학교	**고현숙**	학익여자고등학교
권봉희	인천송천고등학교	**장은하**	부개여자고등학교	**김성래**	광성고등학교	**문서영**	인천청라고등학교
서순옥	인천예술고등학교	**박진상**	인천외국어고등학교	**함유선**	인천여자고등학교	**최윤호**	연수고등학교
김윤수	검단고등학교	**박영경**	세일고등학교	**박종호**	안남고등학교	**안현태**	강화고등학교
안유진	인천진산과학고등학교	**이재정**	인천남동고등학교	**문정연**	연수여자고등학교	**김장회**	인천예일고등학교
유영신	인천상정고등학교	**조성현**	인천원당고등학교	**임승희**	인제고등학교	**이주영**	인천송천고등학교
배수아	인천산곡고등학교	**김복수**	송도고등학교	**이대성**	부광고등학교	**고석구**	건국대학교
박제남	인하대학교	**정문자**	수원대학교	**이재원**	금오공과대학교	**류희수**	경인교육대학교
오흥준	초당대학교	**이종성**	인하대학교	**조규근**	명지대학교	**오종철**	군산대학교
배재형	경희대학교	**김병학**	경희대학교	**이재혁**	이화여자대학교	**이동환**	부산교육대학교
김성기	계산고등학교	**김대흥**	신송고등학교	**김경선**	인천가정고등학교	**박용회**	계산고등학교
전경환	인하대학교사범대학 부속고등학교	**허석**	부개고등학교	**윤기운**	인천여자고등학교	**고일석**	계양고등학교
서동희	인천고잔고등학교	**박희성**	인천영종고등학교	**한경호**	학익여자고등학교	**김혜경**	검단고등학교
조준호	인명여자고등학교	**성미애**	부개여자고등학교	**최항철**	인천국제고등학교		

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* **황우형**	고려대학교	**김동중**	고려대학교	**배성철**	고려대학교	**김경미**	고려대학교
이다희	고려대학교	**권나영**	인하대학교	**최상호**	고려대학교	**김원**	고려대학교
이범석	유신고등학교	**오우상**	영생고등학교	**정선영**	고성중학교삼산분교	**조현제**	진해용원고등학교
조현준	거제옥포고등학교	**김지영**	구암고등학교	**이상우**	창원명곡고등학교	**박종국**	한산중학교
이일권	대광고등학교	**장경란**	죽전고등학교	**김종섭**	보성중학교	**박성복**	보성중학교
최준호	인헌고등학교	**백형윤**	성동고등학교	**박승렬**	홍익대학교사범대학 부속여자고등학교	**윤인준**	경민고등학교

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 확률과 통계

2014. 3. 1. 초판 발행 2015. 3. 1. 2쇄 발행 정가 원
지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인: (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

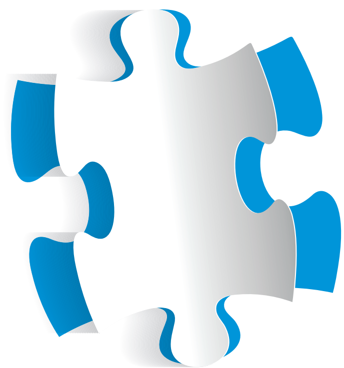
교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04013-0 53410

고|등|학|교 확률과 통계



ISBN 978-89-05-04013-0